NARCISA APREUTESEI DUMITRIU

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

CALCUL INTEGRAL

.

Capitolul 1. Primitive. Integrala nedefinită

1. Noţiunea de primitivă

Definiţia 1 *O funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte primitivă pe intervalul I a funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ dacă F este funcţie derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in I$.*

Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ are cel puţin o primitivă pe I, atunci spunem că *funcţia f admite primitive pe I.*

Propoziţia 1. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I şi F este o primitivă, atunci toate primitivele lui f sunt de forma $F + C$, unde C este o constantă.*

Definiţia 2. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F pe I, atunci mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f se numeşte integrala nedefinită a funcţiei f pe I şi se notează $\int f(x)\, dx$.*

Vom folosi notaţia clasică $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, $x \in I$, $C \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi. 1) Se ştie că orice funcţie continuă admite primitive.

2) Orice funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux şi deci duce orice interval într-un interval.

Probleme rezolvate

1. *Să se arate că următoarele funcţii admit primitive pe $\mathbb{R}$:*

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x - \pi/2}, x \neq \pi/2 \\ -1,\ x = \pi/2 \end{cases} ; b)\ f(x) = \begin{cases} \left(1 + x^2 + 2x^4\right)^{1/x^2}, x \neq 0 \\ e,\ x = 0. \end{cases}$$

R. *a)* Funcţia f este evident continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2\}$. Apoi,

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{-\sin(x - \pi/2)}{x - \pi/2} = -1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

deci f este continuă şi în $\pi/2$. De aici, f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi deci admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Cum $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + x^2 + 2x^4\right)^{1/x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\left(1 + x^2 + 2x^4\right)^{1/\left(x^2 + 2x^4\right)}\right]^{1 + 2x^2} = e = f(0)$, rezultă continuitatea lui f în 0 şi deci pe $\mathbb{R}$. Aşadar f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

2. *Să se arate că funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 1,\ x=0 \end{cases}$ *nu admite primitive pe* $\mathbb{R}$.

R. Fie $G(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0$. Deoarece $G'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0$, rezultă că $G|_{(-\infty,0)}$(respectiv $G|_{(0,\infty)}$) este o primitivă pentru funcţia $f|_{(-\infty,0)}$ (respectiv $f|_{(-\infty,0)}$). Prin reducere la absurd presupunem că f admite primitive. Fie F o primitivă a sa. Atunci F ar avea forma

$$F(x)=\begin{cases} G(x)+c_1,\ x<0 \\ G(x)+c_2,\ x>0 \\ c_3,\ x=0. \end{cases}$$

Cum orice primitivă este o funcţie derivabilă, deci şi continuă în 0, ar trebui să avem $\lim\limits_{x\nearrow 0}(G(x)+c_1)=\lim\limits_{x\searrow 0}(G(x)+c_2)=c_3$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}G(x)=0$, deducem $c_1=c_2=c_3$, de unde

$$F(x)=\begin{cases} G(x)+c_1,\ x\neq 0 \\ c_1,\ x=0. \end{cases}$$

Din faptul că F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'=f$ (definiţia primitivei), rezultă că $F'(0)=f(0)=1$. Dar

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{G(x)+c_1-c_1}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

Contradicţia la care am ajuns arată că f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

3. *Să se arate că funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ -1,\ x=0 \end{cases}$ *nu admite primitive pe* $\mathbb{R}$.

R. Fie funcţia auxiliară $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0,\ x=0 \end{cases}$. Această funcţie este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive. Fie G o primitivă a sa. Fie acum funcţia $H(x)=x^2\cos\dfrac{1}{x}-2G(x), x\neq 0$. Cum $H'(x)=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}-2x\cos\dfrac{1}{x}=\sin\dfrac{1}{x}=f(x),\ x\neq 0$, deducem că $H|_{(-\infty,0)}$(respectiv $H|_{(0,\infty)}$) este o primitivă pentru funcţia $f|_{(-\infty,0)}$ (respectiv $f|_{(-\infty,0)}$).

Dacă f admite primitive (prin reducere la absurd), atunci o astfel de primitivă F a sa ar avea forma

$$F(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}-2G(x)+c_1,\ x<0 \\ x^2\cos\dfrac{1}{x}-2G(x)+c_2,\ x>0 \\ c_3,\ x=0. \end{cases}$$

Funcţia F este continuă pe $\mathbb{R}$, deci în origine avem $\lim\limits_{x\nearrow 0}F(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}F(x)=c_3$, de unde $c_1=c_2$ şi $c_3=-2G(0)+c_1$. Deci,

$$F(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}-2G(x)+c_1,\ x\neq 0 \\ -2G(0)+c_1,\ x=0. \end{cases}$$

Arătăm că F este derivabilă în 0 şi calculăm $F'(0)$:

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}-2\frac{G(x)-G(0)}{x-0}\right)=$$

$$=-2G'(0)=-2g(0)=0.$$

Am obţinut ă F este derivabilă în 0, dar $F'(0)=0\neq f(0)=-1$. Deci presupunerea făcută (că f admite primitive pe $\mathbb{R}$) este falsă.

4. *Cercetaţi dacă funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x},x\neq 0\\ 2,\ x=0\end{cases}$ *admite primitive pe* $\mathbb{R}$.

R. Funcţia f se scrie ca o sumă de două funcţii $f=f_1+f_2$, unde

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x},x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}\quad\text{şi } f_2(x)=\begin{cases}0,x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases}.$$

Prima admite primitive (fiind continuă în 0 şi deci pe $\mathbb{R}$), iar a doua nu admite primitive pentru că nu are proprietatea lui Darboux (duce $\mathbb{R}$ în mulţimea $\{0,1\}$, care nu este interval). Atunci suma lor, f, nu admite primitive.

5. *Arătaţi că funcţia* $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\sin^2\dfrac{1}{x},x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$ *nu admite primitive pe* $\mathbb{R}$.

R. Presupunem că f admite primitive. Pentru că f se scrie sub forma

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\cos\frac{2}{x}), x\neq 0\\ 0,\ x=0,\end{cases}$$

se arată ca în problema 3 că o primitivă a lui f are în mod necesar forma

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}x^2\sin\frac{2}{x}-\frac{G(x)}{2}, x\neq 0,\ x\in[-1,1]\\ -\frac{G(0)}{2},\ x=0,\end{cases}$$

unde G este o primitivă a funcţiei continue $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}x\sin\frac{2}{x}, x\neq 0, x\in[-1,1]\\ 0,\ x=0.\end{cases}$$

Într-adevăr, printr-un calcul simplu se arată că pentru $x\neq 0$, avem $F'(x)=\sin^2\frac{1}{x}=f(x)$. Dar

$$F'(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{G(x)-G(0)}{x-0}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}g(0)=\frac{1}{2}\neq f(0)=0,$$

ceea ce contrazice definiţia primitivei.

6. *Să se arate că funcţia* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ \sqrt{x^2-2x+1},\ x\geq 0\end{cases}$ *admite primitive pe* $\mathbb{R}$ *şi să se calculeze o primitivă a sa.*

R. Funcţia se mai scrie $f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ x-1,\ x\geq 1\\ 1-x, 0\leq x<1.\end{cases}$ Fiind continuă în 0 şi 1, f admite primitive. Fie F o primitivă a sa. Ea va avea forma $F(x)=\begin{cases}x+c_1, x<0\\ \frac{x^2}{2}-x+c_2, x\geq 1\\ -\frac{x^2}{2}+x+c_3, 0\leq x<1.\end{cases}$ Din continuitatea lui F în 0 şi 1 obţinem $c_1=c_3=c$ şi $c_2=c+1$, deci $F(x)=\begin{cases}x+c, x<0\\ \frac{x^2}{2}-x+c+1, x\geq 1\\ -\frac{x^2}{2}+x+c, 0\leq x<1.\end{cases}$ Se verifică uşor că acest F este într-adevăr o primitivă a lui f.

7. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *derivabilă de* n *ori cu* $f^{(n)}$ *continuă,* $n\in\mathbb{N}^*$ *şi* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie polinomială de grad* $n-1$. *Arătaţi că*

$$\int f^{(n)}(x)\,g(x)\,dx=$$

$$=f^{(n-1)}(x)\,g(x)-f^{(n-2)}(x)\,g'(x)+...+(-1)^{n-1}f(x)\,g^{(n-1)}(x)+C.$$

R. Fie G membrul drept din egalitatea de mai sus. Trebuie să demonstrăm că $G'(x)=f^{(n)}(x)\,g(x)$.

Dar $G'=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[f^{(n-k+1)}g^{(k-1)}+f^{(n-k)}g^{(k)}\right]$. Despărţind în două sume şi trecând pe k în $k+1$ în prima sumă, găsim $G'=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}f^{(n-k)}g^{(k)}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(n-k)}g^{(k)}=f^{(n)}g+(-1)^{n-1}fg^{(n)}$. Dar g este polinom de grad $n-1$, deci $g^{(n)}=0$. Aşadar $G'=f^{(n)}g$ sau, alfel spus, G este o primitivă a lui $f^{(n)}g$.

8. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcţie care admite primitive şi* F *o primitivă a sa pentru care* $\lim_{x\to-\infty}F(x)=b\in\mathbb{R}$. *Arătaţi că funcţia* $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}f(\ln x),x\in\mathbb{R}_+^*\\ a,\ x=0\end{cases}$ *are primitive pe* $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ *dacă şi numai dacă* $a=0$.

R. Încercăm să intuim forma unei primitive a lui g, în ipoteza că aceasta există:

$\int g(x)\,dx=\int f(\ln x)\,dx=\int x\left[F(\ln x)\right]'dx=xF(\ln x)-\int F(\ln x)\,dx$.

Funcţia

$$h(x)=\begin{cases}F(\ln x),x>0\\ \lim\limits_{x\searrow 0}F(\ln x),x=0\end{cases}=\begin{cases}F(\ln x),x>0\\ \lim\limits_{y\to-\infty}F(y)=b\in\mathbb{R},x=0\end{cases},$$

fiind continuă, are primitive. Fie H una. Atunci o primitivă a lui g, dacă există, are forma

$$G(x)=\begin{cases}xF(\ln x)-H(x)+C,x>0\\ -H(0)+C,x=0.\end{cases}$$

Aceasta s-a obţinut din continuitatea lui G. Se verifică prin calcul direct că G este derivabilă şi $G'=g$ pentru $x>0$. Impunând acelaşi lucru şi

pentru $x = 0$, ajungem la concluzia că G este derivabilă la dreapta în 0 şi $G'(0) = g(0) \Leftrightarrow a = 0$.

2. Metode de calcul pentru primitive

Teorema 1 (a integrării prin părţi). *Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile pe I şi funcţia fg' admite primitive pe I, atunci şi funcţia $f'g$ admite primitive pe I şi are loc formula de calcul*

$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx,\ x \in I,$$

numită formula integrării prin părţi.

Teorema 2 (teorema întâi de schimbare de variabilă). *Se dau funcţiile $f : I \to \mathbb{R}$ şi $g : J \to \mathbb{R}$ (I, J intervale din $\mathbb{R}$), astfel încât g admite o primitivă G pe J. Fie $\varphi : I \to J$ derivabilă pe I, cu proprietatea că $f = (g \circ \varphi)\, \varphi'$ pe I. Atunci funcţia $G \circ \varphi$ este o primitivă pe I a lui f, adică*

$$\int f(x)\, dx = G(\varphi(x)) + C,\ x \in I.$$

Teorema 3 (teorema a doua de schimbare de variabilă). *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Presupunem că există o funcţie $g : J \to \mathbb{R}$ care admite primitive pe J (fie G o astfel de primitivă) şi o funcţie $\varphi : J \to I$ bijectivă şi derivabilă pe J astfel încât $\varphi' \neq 0$ pe J şi $g = (f \circ \varphi)\, \varphi'$ pe J. Atunci funcţia $G \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă pe I a funcţiei f, adică*

$$\int f(x)\, dx = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C,\ x \in I.$$

Prezentăm acum unele metode de integrare pentru câteva clase de funcţii. Începem cu clasa funcţiilor raţionale. Definiţia şi proprietăţile elementare ale acestor funcţii se presupun cunoscute.

Definţia 1. *Se numesc fracţii simple funcţiile raţionale de forma $A/(x-a)^n$, $x \neq a$ şi $(Ax+B)/(ax^2+bx+c)^n$, cu $b^2 - 4ac < 0$, în ambele cazuri n fiind un număr natural.*

Teorema 4. *Orice funcţie raţională $P(x)/Q(x)$ se descompune în mod unic în fracţii simple.*

Dăm mai jos câteva clase de primitive care se pot calcula prin reducere la primitive ale unor funcţii raţionale.

1. Integrale din funcţii iraţionale de forma

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_r/q_r}\right] dx,$$

cu R funcţie raţională, iar $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$. Se face schimbarea de variabilă $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^n$, unde $n = \text{cmmmc}\,(q_1, \ldots, q_r)$.

2. Integrale binome (Cebîşev): $\int x^m (ax^n + b)^p\, dx$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Ele se reduc la integrale din funcţii raţionale în cazurile:

1) $p \in \mathbb{Z}$. Facem substituţia $x = z^r$, r este multiplul comun al numitorilor lui m şi n;

2) $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$. Facem substituţia $ax^n + b = z^s$, s este numitorul lui p;

3) $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$. Facem substituţia $\dfrac{ax^n + b}{x^n} = z^s$, unde s este numitorul lui p.

3. Integrale din funcţii raţionale de funcţii trigonometrice:

$\int R\,(\sin x, \cos x)\, dx$, cu $R\,(u, v)$ funcţie raţională. Se face substituţia $\text{tg}\,\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\,\text{arctg}\,t + 2k\pi$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, $\sin t = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Calculul primitivei poate fi simplificat în cazurile:

a) $R\,(-\sin x, \cos x) = -R\,(\sin x, \cos x)$ (impar în sin) $\Rightarrow \cos x = t$.

b) $R\,(\sin x, -\cos x) = -R\,(\sin x, \cos x)$ (impar în cos) $\Rightarrow \sin x = t$.

c) $R\,(-\sin x, -\cos x) = R\,(\sin x, \cos x)$ (par în sin, cos) $\Rightarrow \text{tg}\,x = t$.

4. Integrale de tip Euler: $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$, $R\,(u, v)$ – funcţie raţională.

I. Dacă $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale x_1, x_2, atunci substituţia este $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\,(x - x_1)$ sau $t\,(x - x_2)$. Avem

$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = t^2\,(x - x_1)^2 \Leftrightarrow a\,(x - x_2) = t^2\,(x - x_1)$.

II. Dacă $a > 0$, atunci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$ sau $\sqrt{a}x - t$ sau $-\sqrt{a}x + t$ sau $-\sqrt{a}x - t$.

III. Dacă $c > 0$, atunci $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx$ sau $-\sqrt{c} + tx$ sau $\sqrt{c} - tx$.

Probleme rezolvate

1. *Folosind substituţii trigonometrice, să se calculeze:*

a) $I = \int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$; *b)* $I = \int \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$, $x \in (0,+\infty)$; *c)* $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, $x \in (1,+\infty)$.

R. *a)* Cu substituţia $x = \sin t$, $t \in (0,\pi)$, avem

$$I = \int \frac{\sin^2 t \cos t\, dt}{\cos t} = \int \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

b) Facem $x = \operatorname{tg} t$, $t \in (0,\pi/2)$.

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int \frac{\dfrac{1}{\cos t}}{\operatorname{tg} t}\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int \frac{1}{\sin t \cos^2 t}dt =$$
$$= \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos^2 t}dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt + \int \frac{dt}{\sin t} =$$
$$= \int \frac{-(\cos t)'}{\cos^2 t}dt + \int \frac{(-\cos t)'}{1-\cos^2 t}dt = \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}\right| + C$$
$$= \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

c) Facem $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $t \in (0,\pi/2)$.

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt = t + C = \arccos\frac{1}{x} + C.$$

2. *Utilizând metoda integrării prin părţi, calculaţi:*

a) $I = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} dx$, $x \in (-1,1)$; *b)* $I = \int e^x \cos x\, dx$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $I_n = \int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$.

R. *a)* Putem scrie succesiv

$$I = \int -\left(\sqrt{1-x^2}\right)' e^{\arcsin x} dx = -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \int \sqrt{1-x^2} \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \int e^{\arcsin x} dx = -\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + x e^{\arcsin x} -$$

$$- \int e^{\arcsin x} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Deci $I = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} + \frac{x}{2} e^{\arcsin x} + C.$

b) Integrând de două ori prin părţi, avem:

$$I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx$$

Deci $I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$

c) Scriind numărătorul 1 ca x' şi integrând prin părţi, obţinem

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \frac{-n \cdot 2x (x^2+a^2)^{n-1}}{(x^2+a^2)^{2n}} dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} +$$

$$+ 2n \int \frac{(x^2+a^2) - a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\, I_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

Deci $2na^2 I_{n+1} = (2n-1)\, I_n + \frac{x}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow$

$$\begin{cases} I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n}, & n \geq 1, \\ I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{cases}$$

3. *Calculaţi următoarele integrale nedefinite pe intervale care nu conţin punctele în care se anulează numitorii: a)* $I = \int \frac{x+3}{x^3-x} dx$;

b) $I = \int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2} dx$; *c)* $I = \int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$.

R. *a*) Descompunând în fracţii simple, găsim

$$I=\int\left(-\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx=-3\ln|x|+2\ln|x-1|+\ln|x+1|+C.$$

b)

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+4)-2}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+4x+5\right)'}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx-\int\frac{(x+2)'\,dx}{\left[(x+2)^2+1\right]^2}.$$

În integrala a doua facem substituţia $2+x=z$ şi obţinem

$$I=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+5}-\int\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2}=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z-\frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1}+C,$$

deci

$$I=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)-\frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+4x+5}+C$$

sau

$$I=-\frac{x+3}{2\left(x^2+4x+5\right)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

$$c)\ I=\int\frac{dx}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)^2}=\int(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+$$
$$+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+x+1\right)^2})dx=A\ln|x-1|-\frac{B}{x-1}+$$
$$+\frac{C}{2}\int\frac{(2x+1)+\dfrac{2D}{C}-1}{x^2+x+1}dx+\int\frac{Ex+F}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx.$$

Avem $A=-\dfrac{2}{9}$, $B=\dfrac{1}{9}$, $C=\dfrac{2}{9}$, $D=\dfrac{1}{3}$, $E=\dfrac{1}{3}$, $F=\dfrac{1}{3}$. Notăm J_1 şi J_2 ultimele două integrale de mai sus. Atunci,

$$J_1=\frac{1}{9}\int\frac{(2x+1)+2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{9}\ln\left(x^2+x+1\right)++\frac{2}{9}\int\frac{d\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}=$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{4}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Pentru calculul lui J_2 vom utiliza integrala de la problema 2, c) pentru $n=1$, $a=\sqrt{3}/2$ şi $x+1/2$ în loc de x.

$$J_2 = \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx +$$

$$+\frac{1}{6}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2} = -\frac{1}{6}\frac{1}{x^2+x+1} +$$

$$+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + \frac{1}{2\cdot\frac{3}{4}}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right] + C,$$

deci

$$J_2 = -\frac{1}{6}\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{2}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{18}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C.$$

Se înlocuiesc J_1 şi J_2 în expresia lui I şi se termină calculul.

4. *Să se determine următoarele primitive din funcţii iraţionale:*

a) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, $x \in (0,\infty)$; *b)* $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$, $x \in (1/2,\infty)$;

c) $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$, $x \in (0,\infty)$; *d)* $I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, $x \in \mathbb{R}$.

R. *a)* Făcând schimbarea de variabilă $x = t^6$, se obţine

$$I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$
$$= 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

b) Facem substituţia $2x-1=t^4 \Rightarrow dx=2t^3dt$

$$I=\int \frac{2t^3dt}{t^2-t}=2\int \frac{t^2}{t-1}dt=2\int \frac{(t^2-t)+(t-1)+1}{t-1}dt=$$
$$=2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=t^2+2t+2\ln|t-1|+C=$$
$$=\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|^2+C.$$

c) I se scrie sub forma $I=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}dx$, deci este o integrală binomă cu $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$. Avem $\frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^{\frac{1}{4}}+1=z^3\Rightarrow x=\left(z^3-1\right)^4$, $dx=12z^2\left(z^3-1\right)^3dz$, de unde

$$I=\int\left(z^3-1\right)^{-2}z\cdot 12z^2\left(z^3-1\right)^3dz=12\int z^3\left(z^3-1\right)dz=$$
$$=\frac{12}{7}z^7-3z^4+C=\frac{12}{7}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{4}{3}}+C.$$

d) $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\left(x^4+1\right)^{-\frac{1}{4}}dx$. Avem $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$. Deci $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n}+p=0\in\mathbb{Z}$. Facem substituţia

$$\frac{x^4+1}{x^4}=z^4\Leftrightarrow\frac{1}{x^4}=z^4-1\Leftrightarrow x=\left(\frac{1}{z^4-1}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(z^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

De aici, $dx=-z^3\left(z^4-1\right)^{-5/4}dz$. Atunci,

$$I=\int\left[\left(z^4-1\right)^{-1}+1\right]^{-\frac{1}{4}}\left(-z^3\right)\left(z^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dz=$$
$$=\int\left(\frac{z^4}{z^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}\frac{-z^3}{\left(z^4-1\right)^{\frac{5}{4}}}dz=\int\frac{-z^2}{z^4-1}dz=$$
$$=\int\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2+1}\right]dz=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z+$$
$$+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\left(1+x^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}+1}{\left(1+x^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(1+x^{-4}\right)^{\frac{1}{4}}+C.$$

5. *Să se calculze următoarele primitive din funcţii raţionale depinzând de funcţii trigonometrice:*

a) $\int \dfrac{dx}{1+\sin x+\cos x}$, $x\in\mathbb{R}$; *b)* $\int \dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}dx$, $x\in\mathbb{R}$;

c) $\int \dfrac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$, $x\in(0,\pi/2)$; *d)* $\int \sin 3x\cos 5x\,dx$, $x\in\mathbb{R}$.

R. *a)* Facem $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$.

$$I=\int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{2\,(1+t)}=\ln|t+1|+C=$$
$$=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C.$$

b) $I=\int \dfrac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,dx$. Funcţia de sub integrală este impară în $\sin x$ $\Rightarrow$facem schimbarea de variabilă $\cos x=t$, de unde $-\sin x dx=dt$, $\sin^2 x=1-t^2$.

$$I=\int\frac{dt}{t^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C,\ \text{deci}$$
$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right|+C.$$

c) $I=\int \dfrac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int\dfrac{dx}{(\operatorname{tg}x+1)^2\cos^2 x}$. Funcţia de sub integrală fiind pară în sin şi cos, vom face schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}x=t$. Atunci, $\operatorname{tg}^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$. Diferenţiind, găsim $\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt$, de unde $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Deci,

$$I=\int\frac{1}{(t+1)^2\dfrac{1}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{(t+1)^2}=-\frac{1}{t+1}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}+C.$$

d)
$$I=\int\sin 3x\cos 5x\,dx=\int\frac{1}{2}\left[\sin 8x-\sin 2x\right]dx=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{-\cos 8x}{8}-\frac{1}{2}\frac{-\cos 2x}{2}+C=-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C.$$

6. *Calculaţi integralele de tip Euler pe intervale pe care funcţiile sunt bine definite:*

a) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$; *b)* $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$;

c) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

R. *a)* Facem substituţia $\sqrt{x^2-3x+2} = t(x-1) \Rightarrow (x-1)(x-2) = t^2(x-1)^2 \Leftrightarrow x-2 = t^2(x-1) \Rightarrow x - t^2x = 2 - t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{t^2-1} \Rightarrow dx = \frac{2t(t^2-1) - 2t(t^2-2)}{(t^2-1)^2}dt \Leftrightarrow dx = \frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$, $\sqrt{x^2-3x+2} = t\left(\frac{t^2-2}{t^2-1} - 1\right) = t\frac{-1}{t^2-1}$.

$$I = \int \frac{\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt}{\frac{-1}{t^2-1}\frac{-t}{t^2-1}} = \int 2dt = 2t + C = 2\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1} + C.$$

Dacă $x > 2$, rezultă că $I = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C$.

b) $a > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2x+2} = x + t \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2tx + t^2 \Leftrightarrow 2(1-t)x = t^2 - 2 \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{2(1-t)} \Rightarrow dx = \frac{2t(2-2t) - (t^2-2)(-2)}{4(1-t)^2}dt$, deci $dx = \frac{-2t^2+4t-4}{4(1-t)^2}dt$. În plus,

$$1 + \sqrt{x^2+2x+2} = 1 + x + t = 1 + \frac{t^2-2}{2(1-t)} + t = \frac{t^2}{2(t-1)}.$$

$$I = \int \frac{2(t-1)}{t^2} \cdot \frac{-2t^2+4t-4}{4(t-1)^2}dt = -\int \frac{t^2-2t+2}{t^2(t-1)}dt =$$
$$= \int \left(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t-1}\right)dt = -\frac{2}{t} - \ln|t-1| + C =$$
$$-\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+2} - x} - \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1\right| + C.$$

c) Facem substituţia $\sqrt{x^2+x+1}=1+tx$, de unde $x^2+x+1=1+2tx+t^2x^2$. Deci, $x+1=2t+t^2x \Rightarrow 1-2t=x\left(t^2-1\right) \Rightarrow x=\dfrac{1-2t}{t^2-1} \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=1+t\dfrac{1-2t}{t^2-1}=\dfrac{-t^2+t-1}{t^2-1}$; $x+1=\dfrac{t^2-2t}{t^2-1}$,

$$dx=\frac{-2\left(t^2-1\right)-\left(1-2t\right)2t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\frac{2\left(t^2-t+1\right)dt}{\left(t^2-1\right)^2}.$$

$$I=\int\frac{t^2-1}{t^2-2t}\cdot\frac{t^2-1}{-t^2+t-1}\cdot\frac{2\left(t^2-t+1\right)dt}{\left(t^2-1\right)^2}=-2\int\frac{dt}{t^2-2t}=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-2}\right)dt=\ln|t|-\ln|t-2|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x^2+x+1}-1-2x}\right|+C.$$

3. Probleme propuse

1. Să se arate că următoarele funcţii admit primitive pe $\mathbb{R}$:

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1,\ x=0\end{cases};b)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}e^{-1/x^2}, x\neq 0\\ 0,\ x=0.\end{cases}$$

R. Funcţiile sunt continue în origine, deci pe $\mathbb{R}$ şi în consecinţă admit primitive.

2. Se consideră funcţia $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ a,\ x=0.\end{cases}$

Determinaţi valorile lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

R. $a=0$.

3. Calculaţi următoarele integrale: $a)\ \int\sin^2 x dx$, $x\in\mathbb{R}$; $b)\ \int\cos^3 x dx$, $x\in\mathbb{R}$; $c)\int e^{\sin 2x}\cos 2x dx$, $x\in\mathbb{R}$.

R. $a)\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+c$; $b)\ \sin x-\dfrac{\sin^3 x}{3}+c$; $c)\ \dfrac{1}{2}e^{\sin 2x}+c$.

4. Să se calculeze: $a)\ \int\dfrac{x^5}{\left(4+x^3\right)^2}dx$, $x\in\left(-\sqrt[3]{4},\infty\right)$; $b)\ \int\dfrac{dx}{x^2+2x+5}$, $x\in\mathbb{R}$; $c)\ \int 9x^2\sqrt[3]{10-x^3}dx$, $x\in\mathbb{R}$.

R. $a)\ \frac{1}{3}\ln|x^3+4|+\frac{4}{3(x^3+4)}+c;\ b)\ \frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+c;\ c)\ -\frac{9}{4}(10-x^3)^{4/3}+c.$

5. Arătaţi că dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă şi pară (respectiv impară), atunci f' este impară (respectiv pară). Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie pară (respectiv impară) care admite primitive. Este adevărat că orice primitivă G a lui g pe $\mathbb{R}$ este pară sau impară?

R. Nu. Contraexemplu: $g(x)=\cos x$, $G(x)=\sin x+3$.

6. Fie $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_k(x)=\begin{cases} ax\cos\frac{b}{x}+c\sin\frac{d}{x}, x\neq 0 \\ k,\ x=0 \end{cases}$, unde $a,b,c,d\in\mathbb{R}^*$. Să se determine valorile lui $k\in\mathbb{R}$ pentru care f are primitive pe $\mathbb{R}$.

R. $k=0$.

7. Să se determine o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile: $f(0)=2005$ şi există $a\in(0,1)$ a.î. $f(x)-f(ax)=x^3+x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

R. Înlocuind x cu a^ix, $i\in\mathbb{N}$ şi sumând după i de la 0 la $n-1$ ($n\in\mathbb{N}$ fixat), ajungem la

$$f(x)=f(a^nx)+x^3\frac{1-a^{3n}}{1-a^3}+x^2\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}.$$

Trecând la limită pentru $n\to\infty$ (x fixat) şi folosind continuitatea lui f, obţinem $f(x)=2005+\frac{x^3}{1-a^3}+\frac{x^2}{1-a^2}$.

8. Să se arate că funcţia $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^5}e^{-1/x^2}, x\neq 0\\ 0,\ x=0\end{cases}$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

R. Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$ (pentru calculul limitei în 0 se face substituţia $t=1/x^5$ şi se aplică de 3 ori regula lui l'Hôpital), deci admite primitive.

9. Să se determine o primitivă a funcţiei $f(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$, $x\in(0,\infty)$.

R. $\ln\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}+c$.

10. Arătaţi că funcţia $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{e^x}, x\in(-\infty,1)\\ (\ln^2 x)/x,\ x\in[1,\infty)\end{cases}$ admite primitive pe $\mathbb{R}$ şi calculaţi o primitivă.

R. f este continuă, deci admite primitive: $F(x)=\begin{cases}-xe^{-x}+C, x\in(-\infty,1)\\ \frac{\ln^3 x}{3}-\frac{1}{e}+C, x\in[1,\infty).\end{cases}$

Capitolul 2. Integrala definită (Riemann)

1. Definiţia integralei Riemann

Fie $[a,b]$ un interval compact în $\mathbb{R}$. O succesiune de puncte $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ se numeşte o *diviziune a intervalului* $[a,b]$. Notăm cu $\mathcal{D}[a,b]$ mulţimea diviziunilor intervalului $[a,b]$. Numim *normă a diviziunii* Δ, numărul real pozitiv $||\Delta|| = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$.

Un sistem de puncte $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ din intervalul $[a,b]$, cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, se numeşte *sistem de puncte intermediare*. Notăm cu $\mathcal{P}(\Delta)$ mulţimea sistemelor de puncte intermediare ale diviziunii Δ.

Definiţia 1. *Numim sumă Riemann asociată funcţiei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *diviziunii* Δ *şi sistemului de puncte intermediare* $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ *ale intervalului* $[a,b]$, *suma*

$$S(f,\Delta,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiţia 2. *Spunem că funcţia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ *dacă există un număr real* $I(f)$ *cu proprietatea că*

$(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *astfel încât* $(\forall)\,\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$ cu $||\Delta|| < \delta$ *şi* $(\forall)\,\xi \in \mathcal{P}(\Delta)$, *să avem*

$$|S(f,\Delta,\xi) - I(f)| < \varepsilon.$$

Notăm cu $\mathcal{R}[a,b]$ mulţimea funcţiilor integrabile Riemann pe $[a,b]$.

Numărul $I(f)$ dacă există, este unic şi se numeşte *integrala Riemann a funcţiei* f *pe* $[a,b]$. Se notează $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Observăm că dacă f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||\Delta||\to 0} S(f,\Delta,\xi) = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

independent de alegerea punctelor intermediare ξ.

Din caracterizarea limitei cu şiruri rezultă că $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de diviziuni $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ...$ ale intervalului $[a,b]$, cu şirul normelor $||\Delta_n|| \to 0$ (pentru $n \to \infty$) şi oricare ar fi şirul de puncte intermediare (ξ^n), avem

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n,\xi^n) = I(f).$$

Probleme rezolvate

1. *Să se arate că următoarele şiruri au limită şi să se calculeze limitele lor cu ajutorul integralei definite:*

$s_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n},\ n \in \mathbb{N}^*.$

R. Scriem pe s_n sub forma $s_n = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} + \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}} + ... + \dfrac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right]$. Considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Pentru $n \geq 1$ luăm diviziunea

$$\Delta : x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < ... < x_n = \frac{n}{n} = 1$$

cu $||\Delta|| = 1/n$ şi punctele intermediare $\xi_i = x_i = i/n,\ i = \overline{1,n}$.

Observăm că termenul general al şirului din enunţ coincide cu suma Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi punctelor intermediare ξ_i :

$$S(f,\Delta,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+n} = s_n.$$

Funcţia f este continuă, deci integrabilă. Avem

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)\,|_0^1 = \ln 2.$$

2. $s_n = \dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1+\dfrac{2}{n}} + ... + \sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right],\ n \in \mathbb{N}^*.$

R. Observăm că s_n este suma Riemann a funcţiei $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x}$ (continuă şi deci integrabilă pe $[0,1]$), diviziunii Δ şi puntelor intermediare de la problema 1. Deci,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,|_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

3. $s_n = \dfrac{\pi}{2n}\left[1 + \cos\dfrac{\pi}{2n} + \cos\dfrac{2\pi}{2n} + ... + \cos\dfrac{(n-1)\,\pi}{2n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. Funcţia $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ este continuă şi deci integrabilă. Luăm diviziunea

$$\Delta : x_0 = 0 < x_1 = \frac{\pi}{2n} < ... < x_n = \frac{\pi n}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

de normă $||\Delta|| = \pi/2n \to 0$ şi punctele intermediare $\xi_i = x_{i-1} = \dfrac{(i-1)\,\pi}{2n}$, $i = \overline{1, n}$. Atunci,

$$s_n = S(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \cos\frac{(i-1)\,\pi}{2n}\left(\frac{i\pi}{2n} - \frac{(i-1)\,\pi}{2n}\right).$$

Cum f este integrabilă, $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$.

4. $s_n = \dfrac{1}{n^5}\left(1 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. $s_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^4 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^4 + ... + \left(\dfrac{n}{n}\right)^4\right] = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^4\left(\dfrac{i}{n} - \dfrac{i-1}{n}\right) =$ $S(f, \Delta, \xi)$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, iar diviziunea Δ şi punctele intermediare ξ_i sunt alese ca în problema 1. Cum $f \in \mathcal{R}[0,1]$ şi $\int_0^1 x^4 dx = 1/5$, rezultă că există $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 x^4 dx = 1/5$.

5. $s_n = \dfrac{1}{5n^2}[\sqrt{(5n)^2 - 2^2} + \sqrt{(5n)^2 - 7^2} + ...+$

$+\sqrt{(5n)^2 - (5n-3)^2}]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

R. Scriem suma sub forma

$$s_n = \frac{1}{n}\left[\sqrt{1 - (\frac{2}{5n})^2} + \sqrt{1 - (\frac{7}{5n})^2} + ... + \sqrt{1 - (\frac{5n-3}{5n})^2}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 - (\frac{5i-3}{5n})^2}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = S(f, \Delta, \xi),$$

unde $\Delta : 0 < \dfrac{1}{n} < ... < \dfrac{n}{n} = 1$ cu $||\Delta|| \to 0$, $\xi_i = \dfrac{5i-3}{5n} \in \left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right]$ şi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Cum $f \in \mathcal{R}[0,1]$, rezultă că şirul s_n este convergent şi limita sa este egală cu valoarea integralei $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Dar,

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \arcsin x|_0^1 + x\sqrt{1-x^2}|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2} - I,$$

de unde $\lim_{n\to\infty} s_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

6. *Se dă şirul* $s_n = \int_{1/e^n}^1 [\ln x]\, dx$, *unde* $[y]$ *este partea întreagă a numărului* y. *Să se arate că şirul* $(s_n)_n$ *este convergent şi să se determine limita sa.*

R. Pentru $1/e \leq x < 1 \Rightarrow -1 \leq \ln x < 0 \Rightarrow [\ln x] = -1$. Pentru $1/e^2 \leq x < 1/e \Rightarrow [\ln x] = -2$, ..., pentru $1/e^n \leq x < 1/e^{n-1}$, avem $[\ln x] = -n$. Deci,

$$[\ln x] = \begin{cases} -1,\ 1/e \leq x < 1 \\ -2, 1/e^2 \leq x < 1/e \\ \qquad \ldots\ldots \\ -n,\ 1/e^n \leq x < 1/e^{n-1}. \end{cases}$$

Suma se scrie astfel:

$$s_n = \int_{1/e^n}^{1/e^{n-1}} (-n)\, dx + \int_{1/e^{n-1}}^{1/e^{n-2}} -(n-1)\, dx + ... + \int_{1/e}^{1} (-1)\, dx =$$

$$= -n\left(\frac{1}{e^{n-1}} - \frac{1}{e^n}\right) - (n-1)\left(\frac{1}{e^{n-2}} - \frac{1}{e^{n-1}}\right) - ... - 2\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right) -$$

$$- \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{n}{e^n} - \left(\frac{1}{e^{n-1}} + \frac{1}{e^{n-2}} + ... + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} + 1\right) =$$

$$= \frac{n}{e^n} - \frac{(1/e)^n - 1}{(1/e) - 1}.$$

Evident, acest şir are limită şi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{e}{1-e}$.

2. Teoreme de medie

Teorema 1. (de conservare a inegalităţilor). *Dacă* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)\, x \in [a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

Corolar 1. *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $f(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$.

Corolar 2. *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *atunci* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $|\int_a^b f(x)\, dx| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Corolar 3. (Teorema întâi de medie) *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $m \leq f(x) \leq M$, $(\forall)\, x \in [a,b]$, *atunci*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Probleme rezolvate

1. *Fără a calcula integralele să se demonstreze inegalităţile:*

a) $\sqrt{10} \leq \int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1}dx \leq \sqrt{17}$; *b)* $0 \leq \int_{-1/2}^{0} x\ln(1-x^2)\,dx \leq \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}$.

R. *a)* Deoarece $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ este derivabiă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ pe $\mathbb{R}_-$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}_-$. Deci pentru $x \in [-4,-3]$, avem $f(-3) \leq \sqrt{x^2+1} \leq f(-4)$, adică $\sqrt{10} \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{17}$. Aplicând Corolarul 3, ajungem la inegalitatea cerută.

b) Fie $f:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(1-x^2)$. Avem $f'(x) = \ln(1-x^2) + \frac{2x^2}{x^2-1} < 0$, $\forall x \in (-1,0)$, deci $f(0) \leq f(x) \leq f(-1/2)$, $\forall x \in [-1/2,0]$. Cum $f(0)=0$ şi $f(-1/2) = \frac{-1}{2}\ln\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$, integrând dubla inegalitate, obţinem ceea ce trebuia demonstrat.

2. *Fără a calcula integralele, comparaţi-le: a)* $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx$ şi $\int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$; *b)* $\int_2^{10} xarctgxdx$ şi $\int_2^{10}\ln(1+x^2)\,dx$.

R. *a)* Notăm cu f funcţia diferenţă $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$. Cum $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$ pentru orice $x>0$, f este strict crescătoare pe $(0,\infty)$ şi deci $f(x) > f(0)$, pentru $x>0$. Conform Teoremei 1, rezultă că $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx \geq \int_1^2 \frac{x}{x+1}dx$.

b) Fie $f:[2,10]\to\mathbb{R}$, $f(x) = xarctgx - \ln(1+x^2)$. Funcţia este derivabilă de două ori şi $f'(x) = arctgx - \frac{x}{1+x^2}$, $f''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Aşadar f' este strict crescătoare $\Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0$ pentru $x>0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$: $f(x) > f(0) = 0$, $\forall x > 0$. Deci şi pentru $x \in [2,10]$, $xarctgx > \ln(1+x^2)$. De aici, $\int_2^{10} xarctgxdx \geq \int_2^{10}\ln(1+x^2)\,dx$.

3. *Fără a calcula efectiv integrala, arătaţi că* $\frac{1}{3} \leq \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}dx \leq 1$.

R. Fie $f:[4,7]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$. Cum $f'(x)=\dfrac{8}{(x+5)^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-5\}$, deducem că f este strict crescătoare pe $[4,7]$, adică $f(4)=\dfrac{1}{9}\le f(x)\le f(7)=\dfrac{1}{3}$, $\forall x\in[4,7]$. Cu ajutorul Corolarului 3, ajungem la inegalităţile cerute.

4. *Să se arate că* $\int_0^{\pi/2}e^{-\sin x}dx\le\pi/2$.

R. Inegalitatea de mai sus se mai scrie $\int_0^{\pi/2}e^{-\sin x}dx\le\int_0^{\pi/2}dx$. Ar fi suficient ca $e^{-\sin x}\le 1$, $\forall x\in[0,\pi/2]$ sau, echivalent, $e^{\sin x}\ge 1$, $\forall x\in[0,\pi/2]$. Dar aceasta este evident adevărată pentru că $\sin x\in[0,1]$.

3. Clase de funcţii integrabile

Teorema 1 (de mărginire a funcţiilor integrabile). *Dacă* $f\in\mathcal{R}[a,b]$, *atunci* f *este mărginită pe* $[a,b]$.

Teorema 2 (de caracterizare de tip Cauchy). *Funcţia* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ *dacă şi numai dacă*

$$(\forall)\,\varepsilon>0,\ \ (\exists)\,\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \text{a.î.}\ \ (\forall)\,\Delta\ \text{diviziune a intervalului}\ [a,b]$$

$$\text{cu}\ \ ||\Delta||<\delta(\varepsilon)\ \ \text{şi}\ \ (\forall)\,(\xi'),\ \ (\xi'')\ \ \text{sisteme de puncte intermediare,}$$

$$\text{să avem}\ \ |S(f,\Delta,\xi')-S(f,\Delta,\xi'')|<\varepsilon.$$

Propoziţia 1. *Dacă* $f\in\mathcal{R}[a,b]$, *atunci* $f\in\mathcal{R}[c,d]$, *oricare ar fi subintervalul* $[c,d]\subset[a,b]$.

Teorema 3 (de aditivitate a integralei în raport cu intervalul $[a,b]$). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *şi* $c\in(a,b)$ *dat. Dacă* $f\in\mathcal{R}[a,c]$ *şi* $f\in\mathcal{R}[c,b]$, *atunci* $f\in\mathcal{R}[a,b]$ *şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Prezentăm acum câteva clase de funcţii integrabile Riemann.

Teorema 4 (de integrabilitate a funcţiilor continue) *Dacă* f *este o funcţie continuă pe* $[a,b]$, *atunci* $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

Teorema 5 (de integrabilitate a funcţiilor monotone pe porţiuni). *Dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este o funcţie monotonă sau monotonă pe porţiuni pe* $[a,b]$, *atunci* $f\in\mathcal{R}[a,b]$.

Definiţia 1. *O mulţime $E \subset \mathbb{R}$ se numeşte de măsură Lebesgue nulă dacă $(\forall)\,\varepsilon > 0$ există o familie finită sau numărabilă de intervale (a_i, b_i), astfel încât $E \subset \cup_i (a_i, b_i)$ şi $\sum_i (b_i - a_i) < \varepsilon$.*

Orice mulţime finită este de măsură Lebesgue nulă. Orice mulţime numărabilă are măsura Lebesgue nulă.

Definiţia 2. *Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie continuă aproape peste tot (şi scriem "continuă a.p.t".) dacă mulţimea D a punctelor sale de discontinuitate are măsura Legesgue zero.*

Teorema 6 (Teorema lui Lebesgue). *O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă f este mărginită şi continuă aproape peste tot.*

Probleme rezolvate

1. *Arătaţi că funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dată de*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

este mărginită pe $[a, b]$, dar nu este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ (funcţia lui Dirichlet).

R. Evident f este mărginită, deoarece ia doar valorile 0 şi 1. Arătăm că este integrabilă Riemann. Fie $\Delta \in \mathcal{D}[a, b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ conţine atât numere raţionale cât şi numere iraţionale. Fie $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{P}(\Delta)$.

Dacă prin reducere la absurd f ar fi integrabilă pe $[a, b]$, atunci suma Riemann ar trebui să aibă aceeaşi limită, indiferent cum alegem punctele intermediare ξ_i. Dacă alegem $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$, atunci $f(\xi_i) = 0$ şi deci $S(f, \Delta, \xi) = 0$. Dacă $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$, atunci $f(\xi_i) = 1$ şi deci $S(f, \Delta, \xi) = b - a$. Am ajuns astfel la o contradicţie, deci afirmaţia de mai sus este justificată.

2. *Fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0, 1] \\ x^2, & x \in [1, 2]. \end{cases}$ Să se arate că $f \in \mathcal{R}[0, 2]$ şi să se calculeze $\int_0^2 f(x)\,dx$.*

R. Notăm $f_1(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$ şi $f_2(x) = x^2$, $x \in [1, 2]$. Deoarece $f_1 \in \mathcal{R}[0, 1]$ şi $f_2 \in \mathcal{R}[1, 2]$, conform Teoremei 3 rezultă că $f \in \mathcal{R}[0, 2]$ şi

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{4} + \frac{7}{3}.$$

3. *Arătaţi că funcţia* $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ *dată de* $f(x)=1$ *pentru* $x\in[1,2]$ *şi* $f(x)=2$ *pentru* $x\in(2,3]$ *nu este continuă, dar este integrabilă Riemann pe* $[1,3]$.

R. Într-adevăr, f este discontinuă de speţa I în $x=2$, în rest fiind continuă. Deci f este integrabilă pe $[1,3]$ conform Teoremei 3 (de aditivitate în raport cu intervalul) sau conform Teoremei 6 (Lebesgue) (f este mărginită şi continuă a.p.t.).

4. *Arătaţi că* $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}, & x\in[-1,0] \\ 1+x^2, & x\in(0,1] \end{cases}$ *este integrabilă Riemann pe* $[-1,1]$.

R. Observăm că f este discontinuă doar în 0. Cum restricţiile lui f la $[-1,0]$ şi la $(0,1]$ sunt integrabile Riemann (prima fiind continuă pe $[-1,0]$, iar a doua pentru că diferă a.p.t. de funcţia continuă $g(x)=1+x^2, x\in[0,1]$), rezultă conform Teoremei 3 că $f\in\mathcal{R}[-1,1]$ şi $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=$

$$=\int_{-1}^{0}e^{x+1}dx+\int_{0}^{1}\left(1+x^2\right)dx=e^{x+1}|_{-1}^{0}+\left(x+x^3/3\right)|_{0}^{1}=e+\frac{1}{3}.$$

5. *Arătaţi că funcţia* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, *dată de*

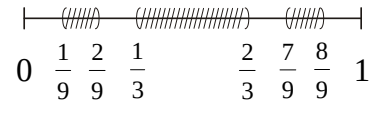
$$f(x)=\begin{cases} 1/q, \text{ dacă } x=p/q\in\mathbb{Q}\cap(0,1] \\ 0, \text{ în rest (în 0 şi în } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}) \end{cases}$$

(numită funcţia lui Riemann) este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

R. Vom aplica Teorema lui Lebesgue. Evident f este mărginită. Vom demonstra că ea este continuă în punctele iraţionale ale intervalului $[0,1]$. Într-adevăr, fie $x_0\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ fixat şi (x_n) un şir din $[0,1]$ convergent la x_0. Dacă (x_n) este şir de numere iraţionale, atunci $f(x_n)=0$ este evident convergent la $f(x_0)=0$. Dacă (x_n) este şir de numere raţionale $x_n=p_n/q_n$, atunci arătăm că $q_n\to\infty$. Presupunem prin reducere la absurd că şirul de numere naturale (q_n) nu tinde la ∞. Atunci el are un subşir mărginit (q_{n_k}). Dar acest lucru nu este posibil decât dacă (q_{n_k}) are la rândul lui un subşir constant $\left(q_{n_{k_l}}\right)$. Atunci acest subşir are limita un număr natural q. Subşirul corespunzător $\left(p_{n_{k_l}}\right)$ fie tinde la $+\infty$, fie are un subşir mărginit. În primul caz $x_{n_{k_l}}=p_{n_{k_l}}/q_{n_{k_l}}\to\infty$, ceea ce contrazice ipoteza $x_n\to x_0$. În cel de-al doilea caz, făcând un raţionament pentru $p_{n_{k_l}}$ similar cu cel pentru q_n, se ajunge la concluzia că şirul $\left(p_{n_{k_l}}\right)$ admite un subşir convergent la un număr

natural p. Atunci subşirul corespunzător al lui (x_n) converge la $p/q \in \mathbb{Q}$, acest lucru fiind din nou în contradicţie cu ipoteza $x_n \to x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Aşadar am dovedit că şirul $q_n \to \infty$. Atunci $f(x_n) = 1/q_n \to 0$. Cum $f(x_0) = 0$, obţinem continuitatea funcţiei f în orice punct x_0 iraţional din $[0,1]$. Deci mulţimea D a punctelor de discontinuitate ale lui f este inclusă în $\mathbb{Q}$, adică este cel mult numărabilă. Aşadar D este de măsură Lebesgue zero. Conform Teoremei lui Lebesgue, rezultă că f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

6.



a) (Un exemplu de mulţime nenumărabilă care are măsura Lebesgue zero) *Se dă mulţimea C definită astfel: împărţim intervalul $[0,1]$ în trei părţi egale şi înlăturăm intervalul $[1/3, 2/3]$. Cele două intervale rămase se împart fiecare în câte trei subintervale egale, după care eliminăm din nou intervalele din mijloc, adică $[1/9, 2/9]$, respectiv $[7/9, 8/9]$. Continuăm această operaţie, adică înlăturăm mereu intervalele din mijloc după ce am împărţit fiecare interval rămas în trei părţi egale. Arătaţi că mulţimea C (numită mulţimea lui Cantor) care rămâne după înlăturarea tuturor acestor intervale este de măsură Lebesgue nulă.*

b) *Se defineşte funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ (numită funcţia lui Cantor) astfel: pe fiecare subinterval din mijloc pe care l-am înlăturat, îi dăm lui f o valoare constantă: anume pe intervalul $[1/3, 2/3]$ luăm $f(x) = 1/2$; pe $[1/9, 2/9]$ definim $f(x) = 1/4$ şi pe $[7/9, 8/9]$ luăm $f(x) = 3/4$ etc. Demonstraţi că f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.*

R. *a*) Lungimea reuniunii intervalelor eliminate este

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + ... = 1.$$

De aici rezultă că mulţimea C care rămâne după înlăturarea tuturor acestor intervale este de măsură Lebesgue nulă.

b) Pe fiecare dintre subintervalele de mai sus, f este constantă, deci continuă. Doar în punctele de schimbare a formei (adică pe mulţimea C de măsură Lebesgue zero), funcţia f poate fi discontinuă. Fiind şi mărginită, conform Teoremei lui Lebesgue rezultă că f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

7. *Arătaţi că funcţia* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}\sin\dfrac{1}{x^2},\ x\in(0,1] \\ 0,\quad x=0 \end{cases}$$

admite primitive pe intervalul compact $[0,1]$*, dar nu este integrabilă Riemann pe* $[0,1]$.

R. Fiind nemărginită pe $[0,1]$, funcţia f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$. Dar f admite primitive pe $[0,1]$, de exemplu funcţia

$$F:[0,1]\to\mathbb{R},\ F(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x^2},\ x\in(0,1] \\ 0,\ x=0. \end{cases}$$

8. *Să se arate că funcţiile* $f_1,f_2:[-1,1]\to\mathbb{R}$,

$$f_1(x)=\begin{cases} 1,x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q} \\ -1,x\in[-1,1]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \end{cases},f_2(x)=\begin{cases} -1,x\in[-1,1]\cap\mathbb{Q} \\ 1,x\in[-1,1]\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \end{cases}$$

nu sunt integrabile pe $[-1,1]$*, dar* f_1+f_2 *şi* f_1f_2 *sunt integrabile pe* $[-1,1]$.

R. Ca în problema 1 se arată că f_1 şi f_2 nu sunt integrabile pe $[-1,1]$. Dar $f_1+f_2=0$ şi $f_1f_2=-1$ sunt constante şi deci integrabile Riemann pe $[-1,1]$.

4. Integrale cu limite de integrare variabile

Ne ocupăm acum de integrale Riemann cu limite de integrare variabile. Dacă $f\in\mathcal{R}[a,b]$, atunci $f\in\mathcal{R}[a,x]$, $(\forall)\,x\in[a,b]$. Deci este bine definită funcţia $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ dată de

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b].$$

Teorema 1 (de continuitate a lui F în raport cu limita superioară). *Dacă* $f\in\mathcal{R}[a,b]$*, atunci funcţia* F *este continuă pe* $[a,b]$.

Teorema 2 (de derivabilitate a integralei în raport cu limita superioară de integrare). *Dacă* $f\in\mathcal{R}[a,b]$ *şi este continuă în punctul* $x_0\in[a,b]$*, atunci funcţia* F *este derivabilă în* x_0 *şi* $F'(x_0)=f(x_0)$.

În particular, are loc următoarea consecinţă.

Corolar 1. *Dacă* f *este continuă pe* $[a,b]$*, atunci funcţia* F *este derivabilă pe* $[a,b]$ *şi* $F'=f$ *pe* $[a,b]$*, adică orice funcţie continuă pe* $[a,b]$ *admite primitive pe* $[a,b]$*, o primitivă fiind dată de formula de mai sus pentru* F.

Probleme rezolvate

1. *Fie* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue. Atunci există un* $\xi \in (a,b)$ *a.î.* $\left(\int_a^\xi f(t)\,dt\right) g(\xi) = f(\xi)\left(\int_b^\xi g(t)\,dt\right)$.

R. Fie $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \cdot \int_x^b g(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$. Funcţia F este continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) şi $F(a) = F(b) = 0$. Conform Teoremei lui Rolle, $\exists \xi \in (a,b)$ cu $F'(\xi) = 0$. Dar

$$F'(x) = f(x)\int_x^b g(t)\,dt + g(x)\int_a^x f(t)\,dt.$$

Atunci $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)\left(\int_b^\xi g(t)\,dt\right) = g(\xi)\left(\int_a^\xi f(t)\,dt\right)$.

2. *Determinaţi punctele de maxim şi de minim pentru funcţia* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x e^{t^2}(t^2-2)\,dt$.

R. Funcţia F este o primitivă a funcţiei continue $f(t) = e^{t^2}(t^2-2)$ (Corolarul 1), deci F este derivabilă şi $F'(x) = f(x) = e^{x^2}(x^2-2)$. Ecuaţia $F'(x) = 0$ are rădăcinile $\pm\sqrt{2}$. În plus, $F'(x) > 0$ pe $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right)$ şi $F'(x) < 0$ pe $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Aşadar, $-\sqrt{2}$ este punct de maxim, iar $\sqrt{2}$ este punct de minim.

3. *Funcţia* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$ *este derivabilă pe* $\mathbb{R}$? *În caz afirmativ, să se determine derivata.*

R. Dacă F este o primitivă a funcţiei continue $f(t) = e^{t^2}$, atunci $G(x) = F(x^3) - F(0)$. Cum F este derivabilă (fiind primitivă), rezultă că şi G este derivabilă (compunere de funcţii derivabile) şi $G'(x) = 3x^2 F'(x^3) = 3x^2 f(x^3) = 3x^2 e^{x^6}$.

4. *Arătaţi că*

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}{\int_0^{tgx} e^{t^2} dt} = -1.$$

R. Fie F o primitivă a funcţiei continue $f(t) = e^{t^2}$, adică $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Dacă notăm $G(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$ şi $H(x) = \int_0^{tgx} e^{t^2} dt$, avem $G(x) = F(\sin x) - F(0)$ şi $H(x) = F(tgx) - F(0)$, conform formulei Leibniz-Newton. Atunci,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{G(x)}{H(x)} = \frac{G'(\pi)}{H'(\pi)} = \frac{[F(\sin x) - F(0)]'}{[F(tgx) - F(0)]'}(\pi) = \frac{F'(\sin x)\cos x}{F'(tgx)\dfrac{1}{\cos^2 x}}(\pi),$$

deci $\lim_{x\to\pi}\dfrac{G(x)}{H(x)}=-\dfrac{f(\sin\pi)}{f(tg\pi)}=-1$.

5. *Se dă funcţia continuă* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$. *Studiaţi continuitatea şi derivabilitatea funcţiei* $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\int_{1/x}^{x}f(t)\,dt$.

R. Fiind continuă, f are primitive pe $[0,\infty)$. Fie G o primitivă a sa. Atunci, $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Conform formulei Leibniz-Newton, $F(x)=G(x)-G(1/x)$, $x\neq 0$. Cum G este o primitivă, ea este continuă şi derivabilă pe $(0,\infty)$. De asemenea, $G(1/x)$ este continuă şi derivabilă pe $(0,\infty)$, fiind compunere de funcţii cu aceleaşi propietăţi. Deci F este continuă şi derivabilă pe $(0,\infty)$ şi

$$F'(x)=G'(x)+\frac{1}{x^2}G'\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. Metode de calcul

Teorema 1 (Teorema Leibniz-Newton). *Dacă funcţia* f *admite primitive pe* $[a,b]$ *(fie* F *o primitivă a lui* f *pe* $[a,b]$*) şi* $f\in\mathcal{R}[a,b]$, *atunci*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(x)\,|_a^b.$$

Această formulă, *numită formula Leibniz- Newton,* se aplică în particular pentru funcţii continue pe $[a,b]$. Dar, aşa cum se va vedea în unele probleme de mai jos, există şi funcţii discontinue cărora le putem aplica formula Leibniz-Newton.

Teorema 2 (formula integrării prin părţi pentru integrala Riemann). *Dacă* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii derivabile cu derivata integrabilă pe* $[a,b]$, *atunc*i

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx=f(x)\,g(x)\,|_a^b-\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Teorema 3 (metoda schimbării de variabilă pentru integrala Riemann). *Fie* $f\in C[a,b]$ *o funcţie dată şi* I *un interval di*n $\mathbb{R}$. *Fie* $\varphi:I\to[a,b]$, $\varphi\in C^1(I)$ *şi* $\alpha,\beta\in I$ *astfel ca* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. *Atunci* $(f\circ\varphi)\varphi'\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]$ *şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{t=\alpha}^{t=\beta}f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Funcţia $\varphi(t)=x$, $t\in[\alpha,\beta]$ (cu $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$) este funcţia care schimbă variabila x în variabila t.

Teorema 4 (metoda schimbării strict monotone de variabilă pentru integrala Riemann). *Fie* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *şi* $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ *funcţii date, cu* $f\in C[a,b]$ *şi* $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, φ *fiind o funcţie strict monotonă pe* $[\alpha,\beta]$ *astfel ca* $\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]$. *Atunci* $(f\circ\varphi)\varphi'\in\mathcal{R}[\alpha,\beta]$ *şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Probleme rezolvate

1. *Arătaţi că funcţia de mai jos este integrabilă Riemann pe* $[0,1]$, *dar pentru calculul integralei lui* f *pe* $[0,1]$ *nu putem aplica formula Leibniz-Newton:*

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1)\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

R. Funcţia f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ fiind monotonă pe $[0,1]$. Dar f nu admite primitive, deoarece nu are proprietatea lui Darboux (nu duce intervalul $[0,1]$ într-un interval, ci în $[0,1)\cup\{2\}$). Deci nu putem aplica formula Leibniz-Newton. Dar din Teorema de continuitate a integralei ca funcţie de limita superioară, avem:

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\left(\frac{t^3}{3}|_0^x\right)=\frac{1}{3}.$$

2. *Să se calculeze următoarele integrale Riemann:*
$I=\displaystyle\int_0^{1/2} x\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$
R. Integrând prin părţi, se obţine

$$I=\int_0^{1/2}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_0^{\frac12}-\frac12\int_0^{1/2}x^2\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x}\,dx=$$

$$=\frac18\ln3-\frac12\int_0^{1/2}\frac{2x^2}{(1-x)^2}\frac{1-x}{1+x}\,dx=\frac18\ln3-\int_0^{1/2}\frac{x^2}{1-x^2}\,dx=$$

$$= \frac{1}{8}\ln 3 + \int_0^{1/2} \frac{1-x^2-1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}.$$

3. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

R. Integrăm prin părţi tinând seama de faptul că $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)'$.

$$I = \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)' \operatorname{arctg} x\,dx = \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

3. $I = \displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\,dx.$

R. Facem substituţia $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Rezultă $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Pentru $x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, iar pentru $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$. Integrala devine:

$$I = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{1-t}{(t^2+t)(t^2+1)}\,dt = 2\int_{1/\sqrt{3}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \left(2\ln|t| - 2\ln|t+1| - 2\operatorname{arctg} t\right)\Big|_{1/\sqrt{3}}^1 =$$

$$= 2\ln\sqrt{3} - 2\ln 2 + 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right) - 2\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{6}.$$

4. $I_m = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx, \quad m \in \mathbb{N}.$

R.

$$I_m = \int_0^{\pi/2} (-\cos x)' \sin^{m-1} x \, dx =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$

$$= (m-1) I_{m-2} - (m-1) I_m, \quad \text{pentru } m > 1.$$

Deci, $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}, \quad m \geq 2,$

$I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$

Rezultă că

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{şi}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n \cdot (2n-2)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1} \ .$$

5. *Arătaţi că pentru orice funcţie f integrabilă pe $[a,b]$, avem*:

a) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)\,dx;$

b) $\int\limits_0^b f(x)\,dx = \int\limits_0^b f(b-x)\,dx;$

c) $\int\limits_0^{2a} f(x)\,dx = \int\limits_0^a [f(x) + f(2a-x)]\,dx.$

R. *a*) Se face schimbarea de variabilă $a+b-x=u$.

b) Se ia $a=0$ la punctul *a*).

c) Se face schimbarea de variabilă $2a-x=u$. Rezultă că

$$\int_0^a f(2a-x)\,dx = -\int_{2a}^a f(u)\,du = \int_a^{2a} f(x)\,dx.$$

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx =$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{2a} f(x)\,dx.$$

6. $I = \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

R. Facem substituţia $\sqrt{x^2-1} = t(x-1)$. Rezultă $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ sau $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$. Un calcul direct conduce la

$$I = -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7. *Arătaţi că funcţia* $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right)$ *este integrabilă Riemann pe* $[0,2]$ *şi să se calculeze* $\int_0^2 f(x)\,dx$.

R. Notăm $g : [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - \frac{2}{1+x^2}$. Observăm că $g(x) = (x-1)\frac{x^2+x+2}{x^2+1}$ are semnul lui $x-1$. Deci,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x \in [1,2] \\ x, & x \in [0,1]. \end{cases}$$

Observăm că f este continuă, deci integrabilă Riemann. Avem

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} + 2arctg2 - \frac{\pi}{2}.$$

8. *Arătaţi că funcţia* $f(x) = \frac{\arcsin x}{x^2} \in \mathcal{R}\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ *şi calculaţi integrala Riemann a lui* f *pe acest interval.*

R. Fiind continuă, f este integrabilă Riemann pe $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ şi admite primitive. Aplicăm formula Leibniz-Newton. Deci calculăm mai întâi o primitivă (folosind metoda integrării prin părţi).

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \arcsin x dx = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Pentru a doua integrală, folosim schimbarea de variabilă $x = \sin t = \varphi(t)$ cu $\varphi : [-\pi/2, \pi/4] \to \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Evident, φ este bijectivă, derivabilă cu φ' continuă şi $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pe $(-\pi/2, \pi/4]$. Dacă $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, atunci

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin t\,|\cos t|} dt =$$

$$= \int \frac{1}{\sin t} dt = \int \frac{(\cos t)'}{\cos^2 t - 1} dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos t - 1}{\cos t + 1} \right|,$$

deci $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right| + C$. Se înlocuieşte în expresia $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$ şi, după aplicarea formulei Leibniz-Newton, se ajunge la

$$\int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

6. Probleme propuse

1. *Să se arate că următoarele şiruri au limită şi să se calculeze limitele lor cu ajutorul integralei definite:*

a) $s_n = \frac{1}{n} \left[\frac{9n^2}{9n^2+2^2} + \frac{9n^2}{9n^2+5^2} + ... + \frac{9n^2}{9n^2+(3n-1)^2} \right]$;

b) $s_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + ... + \frac{n^2}{n+n} \right)$;

c) $s_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{2+5n}} + \frac{1}{\sqrt{4+5n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n+5n}} \right)$.

R. *a)* $\pi/4$; *b)* $ln2 - (1/2)$; *c)* $\sqrt{7} - \sqrt{5}$.

2. *Fără a calcula imtegralele, comparaţi-le:*
$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ şi $\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx$.

R. $\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$.

3. *Arătaţi că* $0 < \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

4. *Arătaţi că funcţia* $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$ *este derivabilă şi calculaţi derivata sa.*

R. $F'(x) = sgn(\cos x) \cos^2 x$.

5. *Calculaţi derivatele următoarelor funcţii specificând şi domeniile lor de derivabilitate*: *a)* $\int_0^{\sin x} \arcsin t dt$; *b)* $\int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t} dt$.

R. *a)* $xcosx$; *b)* $2|x+1|(x+1)$.

6. *Determinaţi valorile integralelor definite: a)* $\int_1^3 \sqrt{7x+3} dx$;
b) $\int_1^e \ln^3 x dx$.

R. *a)* $(4/21)\left(24\sqrt{6} - 5\sqrt{10}\right)$; *b)* $-2e + 6$.

7. *Aflaţi valoarea integralei* $\int_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$.

R. Integrală Cebîşev (binomă); facem $\sqrt{3x^{-2}+1} = t$; obţinem $\sqrt{3}/24$.

8. *Rezolvaţi ecuaţia* $\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{12}$.

R. Integrală binomă; facem $\sqrt{t^2-1} = u$; ecuaţia devine $\int_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\pi}{12}$; soluţia este $x = 2$.

9. *Calculaţi* $I = \int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$.

R. Facem $t = \sqrt{1+\sqrt{x}}$; $I = 8\left(\sqrt{2}+1\right)/15$.

10. Fie $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă şi $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_t^{2t} f(x)\, dx$.

a) Arătaţi că F este continuă;

b) Arătaţi că F este derivabilă şi calculaţi F'.

R. *b*) $F'(t) = 2f(2t) - f(t)$.

Capitolul 3. Integrale improprii

1. Integrale improprii de speţa I

Definiţia 1. *Fie* $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{R}[a,b]$, $\forall b>a$. *Numim*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dacă limita e finită, atunci integrala se zice convergentă sau $f\in\mathcal{R}[a,\infty)$. *Dacă limita este* ∞ *sau nu există, atunci integrala se zice divergentă. Analog,*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Observaţie. Dacă F este o primitivă a lui f pe $[a,\infty)$, atunci

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=F(\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{\infty},$$

unde $F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$.

Criterii de convergenţă

1) **Criteriul de comparaţie.** *Dacă* $0\le f(x)\le g(x)$, $x\in[a,\infty)$, *atunci*

a) $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *convergentă implică* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *convergentă;*

b) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *divergentă implică* $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *divergentă.*

2) **Criteriul de comparaţie cu limită.** *Presupunem că* $0\le f(x)$, $0\le g(x)$, $(\forall)\,x\in[a,\infty)$ *şi că există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x)=A$, $0\le A\le\infty$. *Atunci:*

(a) Pentru $A<\infty$ *şi* $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ (C), *rezultă că şi* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ (C).

(b) Pentru $A>0$ *şi* $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ (D), *rezultă că şi* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ (D).

(c) Pentru $0<A<\infty$, *integralele* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *şi* $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *au aceeaşi natură.*

3) **Criteriul în** α. *Dacă există* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}f(x)=A$, $0<A<\infty$, *atunci*

a) $\alpha>1$ *implică* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *convergentă;*

b) $\alpha \leq 1$ *implică* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *divergentă.*

Definiţia 2. *Dacă* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *convergentă, atunci* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *se numeşte* ***absolut convergentă****, iar* f *se numeşte* ***absolut integrabilă*** *pe* $[a,\infty)$.

Observaţie. Orice funcţie absolut integrabilă pe $[a,\infty)$, este integrabilă pe $[a,\infty)$.

Criteriul lui Dirichlet

Dacă *a)* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall b > a$ *şi* $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq k$,

b) $g(x) \to 0$ *(în mod monoton) pentru* $x \to \infty$,

atunci $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ *este convergentă.*

Criteriul lui Abel

Dacă *a)* $f \in \mathcal{R}[a,\infty)$,

b) g *monotonă şi mărginită pe* $[a,\infty)$,

atunci $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ *este convergentă.*

Probleme rezolvate

1. *Folosind definiţia, să se cerceteze convergenţa integralelor:*

$$a)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2};\qquad b)\ \int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx,\ a>0;\qquad c)\ \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^4}dx.$$

R. *a)* $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$, deci integrala converge.

b)
$$I_b = \int_0^b e^{-ax}\sin x\,dx = \int_0^b e^{-ax}(-\cos x)'\,dx =$$
$$= -e^{-ax}\cos x\Big|_0^b + \int_0^b -ae^{-ax}\cos x\,dx =$$
$$= -e^{-ab}\cos b + 1 - a\left[e^{-ax}\sin x\Big|_0^b - \int_0^b -ae^{-ax}\sin x\,dx\right] =$$
$$= -e^{-ab}\cos b + 1 - a\left(e^{-ab}\sin b + aI_b\right).$$

Deci

$$I_b\left(1+a^2\right) = -e^{-ab}\cos b + 1 - ae^{-ab}\sin b \Rightarrow I_b = \frac{-e^{-ab}\cos b + 1 - ae^{-ab}\sin b}{1+a^2}.$$

Cum $\lim\limits_{b\to\infty} I_b = \dfrac{1}{1+a^2} \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx$ converge şi $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx = \dfrac{1}{1+a^2}$.

c) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^4}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x}{1+x^4}dx + \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x}{1+x^4}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b^2 - \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a^2 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = 0.$$

Integrala este convergentă.

2. *Studiaţi convergenţa integralei probabilităţilor* $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

R. Scriem $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}dx + \int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx$ şi observăm că doar a doua integrală este improprie. Studiem convergenţa ei. Pentru $x > 1$ avem $0 < e^{-x^2} < e^{-x}$ şi cum $\int\limits_1^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_1^\infty = e^{-1}$ este convergentă, rezultă că $\int\limits_1^\infty e^{-x^2}dx$ converge, deci şi $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$ converge.

3. *Studiaţi convergenţa integralelor cu ajutorul criteriului în* α*:*
a) $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{1+x^4}$; *b)* $\int\limits_0^\infty \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$;

R. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^\alpha}{1+x^4} = 1 \in (0,\infty)$ pentru $\alpha = 4 > 1$. Deci, integrala converge.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^{1-\alpha}} = \dfrac{\pi}{2} \in (0,\infty)$ pentru $\alpha = 1 \le 1$. Deci, integrala diverge.

4. *Să se analizeze convergenţa integralei* $\int\limits_a^\infty \dfrac{\sin x}{x^\lambda}dx$, $a > 0$, $\lambda > 0$.

R. Aplicăm Criteriul Dirichlet pentru $f(x) = \sin x$, $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$.

$f \in \mathcal{R}[a,b]$, $\forall b > a$ şi $\left|\int_a^b \sin x\,dx\right| = |\cos b - \cos a| \le 2$.

$g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda} \to 0$ monoton, pentru $x \to \infty$.

Deci, integrala converge.

5. *Arătaţi că* $\int\limits_a^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$ *(*$a > 0$*) nu este absolut convergentă.*

R. Integrala este convergentă conform exerciţiului 4 pentru $\lambda = 1$. Arătăm că $\int\limits_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ este divergentă.

Presupunem că $\int\limits_a^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ converge. Atunci, cum $\sin^2 x \leq |\sin x|$, rezultă că $\int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx$ converge, ceea ce este echivalent cu faptul că $\frac{1}{2} \int\limits_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} dx$ converge. Dar

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Conform Criteriului Dirichlet, $\int\limits_a^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx$ converge (ca în problema 6). Deci $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x}$ converge. Absurd, deoarece $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^\infty = \infty$.

6. *Să se studieze convergenţa integralei improprii* $\int\limits_1^\infty \cos x^2 dx$.

R. Facem schimbarea de variabilă $x = \sqrt{t}$. Rezultă $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ şi deci

$$I = \int_1^\infty \cos x^2 dx = \int_1^\infty \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt.$$

Dar această integrală converge conform Criteriului lui Dirichlet pentru $f(t) = \cos t$ şi $g(t) = 1/(2\sqrt{t})$. Prin urmare şi I converge.

7. *Fie* $I = \int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$. *Să se arate că:*

a) Pentru $\lambda > 0$, *integrala* I *converge.*

b) Pentru $0 < \lambda \leq 1$, *integrala* I *este semiconvergentă (*I *converge, dar* $J = \int\limits_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\lambda} \right| dx$ *diverge), iar pentru* $\lambda > 1$, I *este absolut convergentă.*

R. *a)* Sunt îndeplinite ipotezele din Criteriul Dirichlet:

$f(x) = \sin x$, $f \in \mathcal{R}[1, b]$, $\forall b > 0$ şi $\int\limits_1^b \sin x \, dx = |\cos 1 - \cos b| \leq 2$.

$g(x) = \frac{1}{x^\lambda} \searrow 0$ monoton descrescătoare pentru $x \to \infty$ ($\lambda > 0$).

Deci pentru $\lambda > 0$, $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ converge.

b) Arătăm că $J = \int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right| dx$ diverge pentru $0 < \lambda \leq 1$ şi converge pentru $\lambda > 1$. Avem estimarea:

$$\left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\lambda} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\lambda} = \frac{1}{2x^\lambda} - \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{x^\lambda}.$$

Dar,

$$\int_1^\infty \frac{1}{2x^\lambda} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Big|_1^\infty, \text{ pentru } \lambda \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^\infty = \infty, \text{ pentru } \lambda = 1. \end{cases}$$

Dacă $0 < \lambda \leq 1$, atunci $\int_1^\infty \frac{1}{2x^\lambda}\, dx = \infty$, iar dacă $\lambda > 1$, atunci integrala are o valoare finită, anume $1/2\,(\lambda - 1)$. Deci $\int_1^\infty \frac{1}{2x^\lambda}\, dx$ diverge pentru $0 < \lambda \leq 1$ şi converge pentru $\lambda > 1$.

Pe de altă parte, $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\lambda}\, dx$ converge conform Criteriului lui Dirichlet, ca în problema 6, pentru orice $\lambda > 0$.

De aici, $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\lambda}\right| dx$ diverge pentru $0 < \lambda \leq 1$. Pentru $\lambda > 1$,

$$\frac{|\sin x|}{x^\lambda} \leq \frac{1}{x^\lambda} \text{ şi } \int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda}\, dx = \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}|_1^\infty = \frac{1}{\lambda-1}.$$

Deci, $\int_1^\infty \frac{1}{x^\lambda}\, dx$ converge, de unde şi $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\lambda} dx$ converge (pentru $\lambda > 1$).

Cum $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}\, dx$ converge pentru orice $\lambda > 0$, rezultă că $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ este semiconvergentă pentru $0 < \lambda \leq 1$ şi absolut convergentă pentru $\lambda > 1$.

2. Integrale improprii de speţa a II-a

Definiţia 1. *Fie b punct singular pentru funcţia $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (adică un punct în vecinătatea căruia f este nemărginită)şi integrabilă pe $\forall\,[a,b-\varepsilon]$, cu $\varepsilon>0$. Atunci definim*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

dacă această limită există.

Observaţie. Dacă f admite primitiva F pe $[a,b-\varepsilon]$ şi dacă există $F(b)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}F(b-\varepsilon)$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Analog se definesc integralele improprii de speţa a doua în a. Pentru integralele improprii de speţa a doua, criteriile de convergenţă sunt similare cu cele pentru speţa întâi. Reamintim mai jos doar cele două variante ale Criteriului în α, una pentru integrala improprie în b, alta pentru integrala improprie în a.

Criteriul de convergenţă în α (pentru integrale improprii în b)
Dacă $f:[a,b)\to[0,\infty)$ şi $\exists\lim\limits_{x\to b_-}(b-x)^\alpha f(x)=A\in[0,+\infty]$, atunci

a) $\alpha<1$, $A<\infty$ implică $\int_a^b f(x)\,dx$ convergentă;

b) $\alpha\geq 1$, $A>0$ implică $\int_a^b f(x)\,dx$ divergentă.

Criteriul de convergenţă în α (pentru integrale improprii în a)
Dacă $f:(a,b]\to[0,\infty)$ şi $\exists\lim\limits_{x\to a_+}(x-a)^\alpha f(x)=A\in[0,+\infty]$, atunci

a) $\alpha<1$, $A<\infty$ implică $\int_a^b f(x)\,dx$ convergentă;

b) $\alpha\geq 1$, $A>0$ implică $\int_a^b f(x)\,dx$ divergentă.

Probleme rezolvate

1. *Studiaţi convergenţa integralelor improprii de speţa a II-a:*

a) $\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; *b)* $\int\limits_{-1}^{-1/3}\dfrac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; *c)* $\int\limits_{0}^{1/2}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

R. *a)* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este nemărginită în vecinătatea lui $x=-1$. Prin calcul direct,

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^{0}=$$
$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(-1+\varepsilon)=\frac{\pi}{2}.$$

Integrala este convergentă.

b) Funcţia $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$ este nemărginită în vecinătatea lui $x=-\dfrac{1}{3}$.

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{(-1/3)-\varepsilon}\frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{x+1}{2x}\right)\Big|_{-1}^{(-1/3)-\varepsilon}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin\frac{3\varepsilon-2}{6\varepsilon+2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Integrala este convergentă.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ este nemărginită în vecinătatea lui $x=0$.

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1/2}\frac{(\ln x)'}{\ln^2 x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{1/2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln\varepsilon}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Integrala este convergentă.

2. *Studiaţi convergenţa integralei* $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

R. Funcţia $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ este nemărginită în vecinătatea lui $x=1$. Observăm că

$$A=\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}f(x)=\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pentru $\alpha=1/2$,

$$A=2^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}<\infty,$$

deci integrala converge pentru că $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ şi limita $A < \infty$.

3. *Studiaţi convergenţa integralelor cu ajutorul Criteriului în α:*
a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} c\operatorname{tg} x\, dx$; *b)* $\int\limits_0^{100} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}}$; *c)* $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

R. *a)* $\lim\limits_{x \searrow 0} (x-0)^\alpha f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{x^\alpha}{\sin x} \cos x = 1 > 0$ pentru $\alpha = 1 \leq 1$. Deci, integrala diverge.

b) Funcţia f este nemărginită în vecinătatea lui 0. Integrala este improprie de speţa a II-a. Deoarece

$$\lim_{x \searrow 0} (x-0)^\alpha f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}} = 1 < \infty$$

pentru $\alpha = \dfrac{1}{5} < 1$, integrala converge.

c) f este nemărginită în vecinătatea lui 1. Observăm că

$$\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^\alpha f(x) = \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{\alpha - \frac{1}{3}} (1+x)^{-\frac{1}{3}} \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{3}} = \\ = 2^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}} < \infty$$

pentru $\alpha = \dfrac{1}{3} < 1$. Deci, integrala converge.

4. *Arătaţi că* $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x^\lambda} dx$ *converge pentru* $0 < \lambda < 2$ *şi diverge pentru* $\lambda \geq 2$.

R. Integrala este improprie în 0, dacă $\lambda > 0$ (şi proprie pentru $\lambda \leq 0$). Rezolvăm problema cu Criteriul în α :

$$\lim_{x \to 0} (x-0)^\alpha \frac{\sin x}{x^\lambda} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} x^{\alpha - \lambda + 1} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } \beta = \alpha - \lambda + 1 = 0 \\ 0, \text{ dacă } \beta > 0 \\ \infty, \text{ dacă } \beta < 0 \end{cases}.$$

Pentru $\alpha < 1$, $\beta \geq 0$ $(0 \leq \beta = \alpha - \lambda + 1 < 2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda < 2)$, $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x^\lambda} dx$ converge.

Pentru $\alpha \geq 1$, $\beta \leq 0$ $(0 \geq \beta = \alpha - \lambda + 1 \geq 2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda \geq 2)$, $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin x}{x^\lambda} dx$ diverge.

5. *Să se calculeze valoarea principală în sens Cauchy a integralei* $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

R. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}$. Ambele integrale sunt improprii în 0 şi sunt divergente ($\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{0} = \infty$; $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{0}^{1} = \infty$). Rezultă că $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ nu e convergentă în sens obişnuit (ar fi trebuit ca ambele integrale să fie convergentă). Dar există $\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0$. Deci $\operatorname{Vp} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$. (La Vp se izolează punctele singulare pe intervale simetrice.)

6. *Stabiliţi convergenţa integralei* $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$.

R. Integrala este improprie în 0. Notăm $A = \lim_{x \to 0} (x-0)^{\alpha} f(x) = \lim_{x \to 0} x^{\alpha} \ln \sin x$. Fie în continuare $\alpha > 0$. Aplicând regula lui l'Hôpital, găsim

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\alpha} \cos x \frac{x}{\sin x} x^{\alpha} = 0.$$

Luând $\alpha \in (0,1)$, cum $A = 0 < \infty$, rezultă că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$ converge.

7. *Este* $\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ *convergentă?*

R. Integrala este improprie atât în 0, cât şi în ∞. Observăm că

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

$I_1 = \int_{0}^{1} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ converge pentru că

$$l_1 = \lim_{x \to 0} x^{\alpha} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\alpha} x^{\alpha} = 0,$$

pentru $\alpha > 0$ ($l_1 < \infty$; luăm $0 < \alpha < 1 \Rightarrow I_1$ converge).

$I_2 = \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ converge întrucât

$$l_2 = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\frac{\ln x}{x^{2-\alpha}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{(2-\alpha)\, x^{1-\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-\alpha} x^{\alpha-2} = 0$$

pentru $1 < \alpha < 2$. Aşadar integrala dată este convergentă atât în 0 cât şi în ∞, adică este convergentă.

4. Probleme propuse

1. Să se cerceteze natura integralei improprii $\int_1^\infty xe^{-2x} \sin x dx$.

R. Absolut convergentă.

2. $\int_1^\infty (\sin 2x/x^p) dx, p > 0$.

R. Absolut convergentă pentru $p > 1$; semiconvergentă pentru $0 < p \leq 1$ (Criteriul Dirichlet).

3. $\int_0^\infty \sin x dx$.

R. Divergentă.

4. $\int_0^\infty x \cos x dx$.

R. Divergentă.

5. Să se cerceteze natura integralelor şi în caz de convergenţă să se calculeze valoarea lor:

a) $\int_a^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$, $a > 0$; *b)* $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

R. *a)* $\frac{1}{3} \ln \frac{a+2}{a-1}$; *b)* $\pi/2$.

6. Stabiliţi convergenţa integralei $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\, dx$.

R. Criteriul în α : converge.

7. Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^1 \frac{dx}{(2+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

R. Criteriul în α. Converge.

8. Studiaţi convergenţa integralei dată prin relaţia de recurenţă $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx, n \geq 1$.

R. Converge. Valoarea integralei este $I_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/(2k-1)$.

Capitolul 4. Integrale curbilinii

1. Integrale curbilinii de speţa I

Definiţia 1. *Se numeşte drum (parametrizat) sau curbă în* $\mathbb{R}^n$ *orice funcţie* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$, $t \in [a,b]$ *continuă. Ecuaţiile*

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ ..... \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases}, t \in [a,b]$$

definesc o reprezentare parametrică a drumului (curbei) γ.

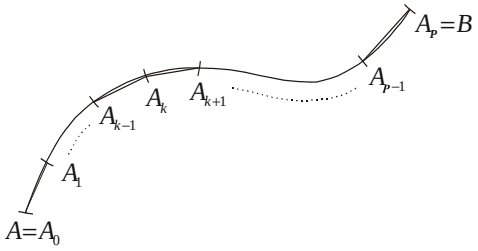
Drumul opus lui $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$, $(\forall)\, t \in [a,b]$.

Dacă $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ şi $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^n$ sunt drumuri cu proprietatea că $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, atunci *juxtapunerea lui* γ_1 *cu* γ_2 este drumul $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{R}^n$,

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), \, t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), \, t \in [b,c]. \end{cases}$$

Un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ se numeşte *drum neted*, dacă funcţiile $\gamma_1, ..., \gamma_n \in C^1([a,b])$. Un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *neted pe porţiuni* dacă se poate scrie ca o juxtapunere a unui număr finit de drumuri netede.

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum dat de reprezentarea parametrică de mai sus, $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi γ_Δ drumul poligonal cu vârfurile în punctele $A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k)) \in \gamma$, $(\forall) k = \overline{1,p}$. Atunci lungimea drumului poligonal γ_Δ este



$$l(\gamma_\Delta) = \sum_{k=1}^{p} |A_{k-1}A_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}.$$

Definiţia 2. *Spunem că drumul γ are lungime finită sau că este rectificabil dacă mulţimea $\{l(\gamma_\Delta),\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ este mărginită. În acest caz, lungimea $l(\gamma)$ a drumului γ este*

$$l(\gamma) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}[a,b]} l(\gamma_\Delta).$$

Teorema 1 (de reprezentare integrală a lungimii unui drum). *Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ un drum neted (sau neted pe porţiuni). Atunci drumul γ este rectificabil, iar lungimea sa este*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + ...[\gamma_n'(t)]^2}dt.$$

Corolar 1. *Presupunem că $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ este un drum definit parametric prin*

$$\gamma : \begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases}$$

pentru $x \in [a,b]$, unde $f \in C^1([a,b])$. Atunci γ este drum rectificabil, iar lungimea sa este

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum rectificabil, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$. Vom defini integrala curbilinie a funcţiei $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ în raport cu lungimea de arc. Pentru aceasta, fie Δ o diviziune a intervalului $[a,b]$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,p}$ un sistem de puncte intermediare şi s_k lungimea segmentului de dreaptă de extremităţi A_{k-1} şi A_k, adică

$$s_k = l([A_{k-1}A_k]) = \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}.$$

Atunci suma Riemann ataşată funcţiei F în raport cu lungimea curbei γ, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$ este

$$S_\gamma(F, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} F(\gamma(\tau_k)) s_k =$$

$$\sum_{k=1}^{p} F\left(\gamma_1\left(\tau_k\right),...,\gamma_n\left(\tau_k\right)\right)\sqrt{\left[\gamma_1\left(t_k\right)-\gamma_1\left(t_{k-1}\right)\right]^2+...+\left[\gamma_n\left(t_k\right)-\gamma_n\left(t_{k-1}\right)\right]^2}.$$

Definiţia 3. *Spunem că funcţia F este integrabilă în raport cu lungimea curbei γ dacă există un număr real I cu proprietatea că $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât $(\forall)\ \Delta\in D([a,b])$ (=mulţimea diviziunilor intervalului $[a,b]$) cu $||\Delta||<\delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare $\tau=\{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$, să avem $|S_\gamma(F,\Delta,\tau)-I|<\varepsilon$.*

Numărul I, dacă există, este unic şi se numeşte *integrala curbilinie (pe curba γ) a funcţiei F*. Se notează $I=\int\limits_\gamma F(x)\,ds$.

Teorema 2 (de reducere a integralei curbilinii de speţa I la o integrală Riemann). *Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$ o curbă netedă sau netedă pe porţiuni, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ un domeniu ce conţine curba γ şi $F:D\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci există integrala curbilinie $\int\limits_\gamma F(x)\,ds$ şi avem*

$$\int\limits_\gamma F\left(x_1,...,x_n\right)ds=\int_a^b F\left(\gamma\left(t\right)\right)\sqrt{\left(\gamma_1'\left(t\right)\right)^2+...+\left(\gamma_n'\left(t\right)\right)^2}dt.$$

Probleme rezolvate

1. *Să se calculeze lungimile următoarelor arce de curbă γ plane:*
a) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in[0,2\pi]$ *(cicloida)*;
b) $y=\ln x-x^2/8$ *care se proiectează pe axa Ox în intervalul $(2,5)$*;
c) $ay^2=x^3$ *de la $x=a$ la $x=b$ $(0<a<b)$ (arcul parabolei semicubice).*

R. Deoarece curbele sunt netede pe porţiuni, rezultă că au lungimi finite, care se calculează după formula din Teorema 1.

a) Avem $x'(t)=a(1-\cos t)$, $y'(t)=a\sin t$. De aici,

$$ds^2=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt^2=2a^2(1-\cos t)\,dt^2=$$

$=4a^2\sin^2\frac{t}{2}dt^2$. Atunci,

$$l(\gamma)=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=8a.$$

b) Pentru o curbă plană definită în mod explicit prin $y = f(x)$, $f \in C^1$, avem $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$, iar lungimea arcului de curbă cuprins între x_1 şi x_2 este $l(\gamma) = \int_{x_1}^{x_2} ds$.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)^2}dx = \sqrt{\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)^2}dx,$$

iar lungimea arcului de curbă cerut este

$$l(\gamma) = \int_2^5 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{21}{8} + \ln\frac{5}{2}.$$

c) Ecuaţiile parametrice ale curbei γ sunt $x = \sqrt[3]{at^2}$, $y = t$, $t \in \left[a, \sqrt{\frac{b^3}{a}}\right]$. Atunci, $x'(t) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{a}{t}}$, $y'(t) = 1$. Deci, $ds = \sqrt{\frac{4}{9}\sqrt[3]{\frac{a^2}{t^2}} + 1}dt$, iar $l(\gamma) = \int_a^{b\sqrt{b/a}} \sqrt{\frac{4}{9}\sqrt[3]{\frac{a^2}{t^2}} + 1}dt$. Pentru a calcula această integrală, facem schimbarea de variabilă $\sqrt[3]{\frac{a^2}{t^2}} = u^2$. De aici, $t = \frac{a}{u^3} \Rightarrow dt = -\frac{3a}{u^4}du$, $u = \sqrt[3]{\frac{a}{t}}$. Deci,

$$l(\gamma) = \int_1^{\sqrt{a/b}} \sqrt{\frac{4}{9}u^2 + 1}\frac{-3a}{u^4}du = 3a\int_{\sqrt{a/b}}^1 \sqrt{\frac{4}{9}u^2 + 1}\frac{1}{u^4}du.$$

Notând $v = 2u/3 \Rightarrow l(\gamma) = \frac{8a}{9}\int_{(2/3)\sqrt{a/b}}^{2/3} \frac{\sqrt{v^2+1}}{v^4}dv$. facem acum o nouă schimbare de variabilă: $\frac{1}{v} = x \Rightarrow \frac{1}{x} = v$, $dv = \frac{-1}{x^2}dx$. Deci, $l(\gamma) = \frac{8a}{9}\int_{(3/2)}^{(3/2)\sqrt{b/a}} x\sqrt{x^2+1}dx$. Să determinăm o primitivă a funcţiei de sub integrală:

$$I = \int x\sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \int x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx + \sqrt{x^2+1} = x^2\sqrt{x^2+1} - 2I + \sqrt{x^2+1},$$

deci $I = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1} + C$. Aplicând formula Leibniz-Newton, găsim $l(\gamma) = \frac{1}{27\sqrt{a}}\left[(9b+4a)^{3/2} - (13a)^{3/2}\right]$.

2. *Să se calculeze* $\int\limits_\gamma ye^{-x}ds$, *unde* γ *este curba dată parametric prin ecuaţiile:*

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2arctgt - t + 1 \end{cases}, t \in [0,1].$$

R. Funcţia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = ye^{-x}$ fiind continuă şi curba γ fiind netedă, există integrala din enunţ. Întrucât

$$x'(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'(t) = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

obţinem

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = 1.$$

Utilizând Teorema 2 ajungem la

$$I = \int\limits_\gamma ye^{-x}ds = \int\limits_0^1 (2arctgt - t + 1)e^{-\ln(1+t^2)}dt = \int\limits_0^1 2arctgt \cdot \frac{1}{1+t^2}dt -$$

$$- \int\limits_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt + \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = arctg^2 t|_0^1 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)|_0^1 +$$

$$+ arctgt|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

3. *Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi: a)* $I = \int\limits_{AB} yds$, *unde* AB *este arcul definit prin* $x = t$, $y = \sqrt{t}$, $t \in [1,2]$; *b)* $I = \int\limits_\gamma xyzds$, *unde* γ *este elicea circulară dată de* $\gamma : x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.

R. Funcţiile de sub integrale sunt continue, iar curbele sunt netede, deci există integralele.

a) $I=\int_1^2\sqrt{t}\sqrt{1+\frac{1}{4t}}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{4t+1}dt=\frac{1}{12}\left(4t+1\right)^{3/2}|_1^2=\frac{1}{12}\left(27-5\sqrt{5}\right).$

b) $I=\int_0^{2\pi}a^2bt\cos t\sin t\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2}dt=$

$=a^2b\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int_0^{2\pi}t\sin 2tdt=-\frac{\pi}{2}a^2b\sqrt{a^2+b^2}.$

4. *Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi: a)* $I=\int\limits_\gamma\left(x^2+y^2\right)ds,$ $x=a\left(\cos t+t\sin t\right)$, $y=a\left(\sin t-t\cos t\right),\ t\in[0,2\pi]$; *b)* $I=\int\limits_\gamma\sqrt{x^2+y^2}ds,$ $\gamma:x^2+y^2=ax.$

R. Curbele de mai sus sunt netede pe porţiuni, iar funcţiile de sub integrală sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.

a) $x'\left(t\right)=at\cos t$, $y'\left(t\right)=at\sin t$, $ds=\sqrt{\left(x'\left(t\right)\right)^2+\left(y'\left(t\right)\right)^2}=atdt=dt.$ Deci, $I=$

$$=a^3\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+t^2\sin^2 t+2t\sin t\cos t+\sin^2 t+t^2\cos^2 t-2t\sin t\cos t\right)tdt$$

$$=a^3\int_0^{2\pi}\left(1+t^2\right)tdt=a^3\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)|_0^{2\pi}=2a^3\left(1+2\pi^2\right)\pi^2.$$

b) Cercul γ se mai scrie $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Parametric, avem

$$\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ y=\frac{a}{2}\sin t,t\in[0,2\pi]\end{cases}.$$

Atunci, $x'\left(t\right)=-\frac{a}{2}\sin t, y'\left(t\right)=\frac{a}{2}\cos t$, $ds=\frac{a}{2}dt.$ de aici,

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{a\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\right)}\frac{a}{2}dt=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt-$$

$$-\frac{a^2}{2}\int_\pi^{2\pi}\cos\frac{t}{2}dt=2a^2.$$

5. *Să se calculeze integralele curbilinii de speţa I luate luate de-a lungul curbelor indicate: a)* $\int\limits_\gamma xyzds$, $\gamma : x = t$, $y = \left(2\sqrt{2}/3\right) t^{3/2}$, $z = t^2/2$, $t \in [0,1]$; *b)* $\int\limits_\gamma x^2 ds$, $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, $a > 0$.

R. Curbele de mai sus sunt netede, iar funcţiile de sub integrală sunt continue, deci există integralele curbilinii de speţa I.

a) Elementul de arc este $ds = \sqrt{1 + 2t + t^2}dt = (1 + t)\, dt$, iar integrala devine

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{3} t^{9/2} (1 + t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{2}{11} t^{11/2} + \frac{2}{13} t^{13/2} \right) |_0^1 = \frac{16\sqrt{2}}{143}.$$

b) Ecuaţiile carteziene implicite ale curbei γ sunt:

$$\left\{ \begin{array}{c} z = -x - y \\ 2x^2 + 2y^2 + 2xy = a^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = -x - y \\ \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}. \end{array} \right.$$

Atunci, ecuaţiile parametrice ale curbei sunt

$$\left\{ \begin{array}{c} x + \dfrac{y}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \cos t \\ \dfrac{y\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \sin t \\ z = -x - y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\dfrac{\sqrt{6}}{6} a \sin t + \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cos t \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{3} a \sin t \\ z = -\dfrac{\sqrt{6}}{6} a \sin t - \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \cos t, \ t \in [0, 2\pi]. \end{array} \right.$$

Avem $x'(t) = -\dfrac{\sqrt{6}}{6} a \cos t - \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \sin t$, $y'(t) = \dfrac{\sqrt{6}}{3} a \cos t$, $z'(t) = -\dfrac{\sqrt{6}}{6} a \cos t + \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \sin t$, $ds = adt$. Integrala devine

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{6} a^2 \sin^2 t + \frac{a^2}{2} \cos^2 t - \frac{2\sqrt{3}}{6} a^2 \sin t \cos t \right) adt =$$

$$= \frac{a^3}{6} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \frac{\sqrt{3}}{6} a^3 \int_0^{2\pi} \sin 2t dt =$$

$$= [\frac{a^3}{6}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right) + \frac{a^3}{2}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}a^3\left(-\frac{\cos 2t}{2}\right)]|_0^{2\pi} = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

2. Integrale curbilinii de speţa a II-a

Definiţia 1. *Numim formă diferenţială pe domeniul $D \subseteq \mathbb{R}^n$ o expresie de tipul $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$, unde $P_1, ..., P_n : D \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date depinzând de n variabile (numite coeficienţii formei diferenţiale ω).*

Cazuri particulare. a) Pentru $n = 2$, o formă diferenţială $\omega : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are forma

$$\omega = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

b) Pentru $n = 3$, $\omega : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\omega = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

Fie drumul dat parametric prin

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ ..... \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases}$$

şi $P_1, ...P_n : \gamma([a, b]) \to \mathbb{R}$ funcţii date. Notăm $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$. Fie diviziunea $\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b$ a intervalului $[a, b]$ şi $\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, p}$ un sistem de puncte intermediare. Construim suma Riemann asociată formei diferenţiale ω, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare τ în raport cu γ :

$$S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} \{P_1(\gamma(\tau_k))[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})] +$$

$$+ ... + P_n(\gamma(\tau_k))[\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]\}.$$

Definiţia 2. *Spunem că forma diferenţială ω este integrabilă pe γ dacă există un număr real I astfel încât $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca $(\forall)\, \Delta \in D([a, b])$ cu $||\Delta|| < \delta(\varepsilon)$ şi $(\forall)\, \tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$ un sistem de puncte intermediare, să avem*

$$|S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) - I| < \varepsilon.$$

Numărul I, dacă există, se numeşte *integrala formei diferenţiale ω pe γ* şi se notează $I = \int_\gamma \omega$.

Teorema 1 (de reducere la o integrală Riemann). *Considerăm un drum* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ *neted sau neted pe porţiuni şi* $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ *o formă diferenţială, unde* $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii continue şi* $\gamma \subset D$ *(*D *fiind domeniu). Atunci* ω *este integrabilă pe* γ *şi are loc relaţia*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b [P_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + ... + P_n(\gamma(t)) \cdot \gamma_n'(t)]dt$$

Definiţia 3. *Fie* $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ *o formă diferenţială, unde* $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Integrala formei* ω *se numeşte independentă de drum dacă* $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$, *oricare ar fi* γ_1, γ_2 *două curbe din domeniul* D *având aceleaşi capete.*

Definiţia 4. *Forma diferenţială* $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$, *cu* $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *se numeşte exactă dacă există o funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *diferenţiabilă încât* $df = \omega$.

În acest caz, f se numeşte *primitivă pentru forma diferenţială* ω, iar condiţia $df = \omega$ revine la următoarele egalităţi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = P_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = P_2, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} = P_n.$$

Teorema 2. *Fie* ω *o formă diferenţială având coeficienţii continui pe* D. *Integrala lui* ω *este independentă de drum dacă şi numai dacă pentru orice drum inclus în* D, $\gamma : [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$, *închis (*$\gamma(a) = \gamma(b)$*), avem* $\int_\gamma \omega = 0$.

Definiţia 5. O *mulţimea deschisă* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *se numeşte conexă (prin arce) dacă orice două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în mulţimea* D.

Teorema 3. *1) Orice formă diferenţială exactă cu coeficienţi continui pe o mulţime* D *are integrala independentă de drum.*

2) Dacă D *este deschisă şi conexă (prin arce), are loc şi reciproca.*

Definiţia 6. *Fie* ω *o formă diferenţială,* $\omega = P_1(x_1, ..., x_n)dx_1 + ... + P_n(x_1, ..., x_n)dx_n$, *cu* $P_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clasă* C^1. *Forma diferenţială* ω *se numeşte închisă dacă*

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, (\forall)\, i, j = \overline{1,n}\,, i \neq j.$$

Teorema 4. *Fie* $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$, $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ *de clasă* C^1 *pe* D. *Dacă forma diferenţială* ω *este exactă, atunci* ω *este închisă.*

Definiţia 7. *O mulţime* $D \subset \mathbb{R}^n$ *se numeşte simplu conexă dacă orice curbă* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *simplă (adică injectivă pe* $[a,b)$*) şi închisă,* $\gamma \subseteq D$, *delimitează un domeniu inclus în* D.

Teorema 5. *Fie* $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$, $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ *de clasă* C^1 *pe mulţimea simplu conexă* D. *Dacă forma diferenţială* ω *este închisă, atunci* ω *este exactă.*

Corolar 1. *Dacă* D *este o mulţime simplu conexă din* $\mathbb{R}^n$, *iar* $\omega = P_1 dx_1 + ... + P_n dx_n$ *este o formă diferenţială închisă cu coeficienţii* $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_i \in C^1(D)$, $i = \overline{1,n}$, *atunci integrala lui* ω *pe orice curbă închisă inclusă în* D *este zero.*

Probleme rezolvate

Calculaţi integralele curbilinii de speţa a doua:

1. $\int\limits_{AB} (xdy - ydx)$ *de-a lungul parabolei* $y = x^2$ *între punctele* $A(0,0)$, $B(1,1)$.

R. $I = \int\limits_0^1 xd(x^2) - \int\limits_0^1 x^2 dx = \int\limits_0^1 (2x^2 - x^2)\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. $\int\limits_\gamma \left(\frac{dx}{y} - \sqrt{2x}dy\right)$ *luată pe semicercul* $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y \geq 0$ *în sens pozitiv.*

R. Semicercul $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ se scrie parametric astfel:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \text{ cu } \theta \in [0, \pi].$$

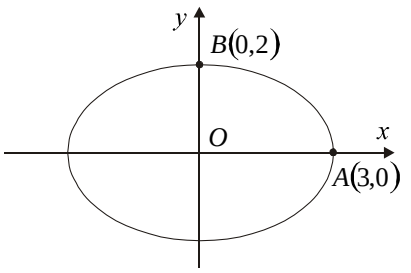
Atunci integrala dată devine

$$I = \int_0^\pi \frac{d(\cos\theta + 1)}{\sin\theta} - \int_0^\pi \sqrt{2(\cos\theta + 1)}d(\sin\theta) =$$
$$= \int_0^\pi \left(-1 - 2\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\right) d\theta = -\theta\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta =$$
$$= -\pi + \frac{1}{2}(-\frac{2}{3}\sin\frac{3\theta}{2}\Big|_0^\pi - 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi) = -\pi + \frac{1}{3} - 1.$$

3. $\int\limits_C \frac{dy}{x+3}$ *luată pe arcul elipsei* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ *între* $A(3,0)$, $B(0,2)$.

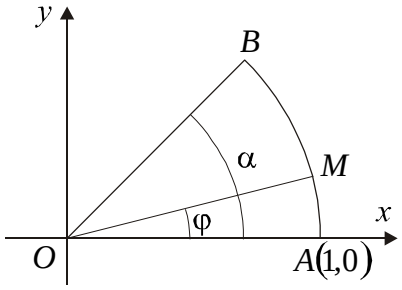
R. Arcul de elipsă se reprezintă parametric prin $\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ cu $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta\, d\theta}{3\cos\theta + 3} =$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{\cos\theta + 1}\right) d\theta =$$



$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right) d\theta = \frac{2}{3}\left(\theta - \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

4. $\int\limits_C x\dfrac{x+y}{x-y}dx - y\dfrac{x+y}{x-y}dy$, *$C$ este conturul sectorului circular de rază* 1 *şi deschidere* $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4}$.



R. Observăm că C se poate scrie ca $C = [OA] \cup \overset{\frown}{AB} \cup [BO]$.

$[OA] : \begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ x \in [0,1] \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 = \int\limits_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}.$

$[AB] : \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, \alpha]$.

$$I_2 = -\int_0^\alpha \cos\varphi \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\sin\varphi\,d\varphi - \int_0^\alpha \sin\varphi \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi =$$
$$= -\int_0^\alpha \sin 2\varphi \frac{1 + 2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}d\varphi =$$
$$= -\int_0^\alpha \sin 2\varphi \frac{1 + \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}d\varphi = -\int_0^\alpha \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}d\varphi - \int_0^\alpha \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\cos 2\varphi|\Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} + \int_0^\alpha \cos 2\varphi\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\cos 2\alpha| - \int_0^\alpha \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}d\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\cos 2\alpha| + \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\int_0^\alpha \frac{(\sin 2\varphi)'}{1 - \sin^2 2\varphi}d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\cos 2\alpha| + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha - 1}\right|.$$

$[BO] : \begin{cases} y = (tg\alpha)\,x \\ x \in [x_B, 0] = [\cos\alpha, 0]. \end{cases}$

$$I_3 = \int_{\cos\alpha}^0 \left(x\frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} - x \cdot tg^2\alpha \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha}\right)dx =$$

$$= (1 + tg\alpha)^2 \int_{\cos\alpha}^{0} x dx = -\frac{1}{2}(1 + tg\alpha)^2 \cos^2\alpha.$$

Se sumează cele trei integrale şi se obţine astfel valoarea integralei cerute.

5. $\int\limits_C (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2 dz,\ C : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ *între* $O(0,0,0)$ *şi* $A(1,1,1)$.

R.

$$I = \int_0^1 \left(t^4 - t^6\right) dt + \int_0^1 2t^5 2t\,dt - \int_0^1 t^2 3t^2 dt =$$
$$= \int_0^1 \left(t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4\right) dt = \int_0^1 \left(-2t^4 + 3t^6\right) dt =$$
$$= -2\frac{t^5}{5}\Big|_0^1 + 3\frac{t^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{35}.$$

6. *Calculaţi* $I = \int\limits_C (2y^2 - 4y + x)\,dx + 4x(y-1)\,dy$, *unde* C *este cercul* $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

R. Notăm $P = 2y^2 - 4y + x$, $Q = 4x(y-1)$. Avem $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 4y - 4$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4(y-1)$. Deci $\omega = P\,dx + Q\,dy$ este formă diferenţială exactă. Rezultă $I = 0$ (C este curbă închisă).

7. *Să se integreze diferenţiala totală exactă*

$$\omega = \frac{(y^2 - xy)\,dx + (x^2 - xy)\,dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, (x,y) \neq (0,0).$$

R. A integra ω este echivalent cu a afla o primitivă a sa ($\omega = df$). Folosim coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos\theta\,d\rho - \rho\sin\theta\,d\theta \\ dy = \sin\theta\,d\rho + \rho\cos\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Atunci ω se scrie astfel:

$$\omega = \frac{1}{\rho^3}\Big[\left(\rho^2\sin^2\theta - \rho^2\sin\theta\cos\theta\right)(\cos\theta\,d\rho - \rho\sin\theta\,d\theta) +$$
$$+ \left(\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin\theta\cos\theta\right)(\sin\theta\,d\rho + \rho\cos\theta\,d\theta)\Big] =$$
$$= \frac{1}{\rho}\Big[\left(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta\right)(\cos\theta\,d\rho - \rho\sin\theta\,d\theta) +$$
$$+ \left(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta\right)(\sin\theta\,d\rho + \rho\cos\theta\,d\theta)\Big] =$$
$$= (\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta.$$

Deci, $\exists f \in C^1$ a.î. $\omega = df = (\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta$. Rezultă $f = \sin\theta + \cos\theta + C$ adică $f = \dfrac{y}{\rho} + \dfrac{x}{\rho} + C = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$.

8. *Să se integreze diferenţiala totală exactă* $dz = \dfrac{y\,dx - x\,dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ *pe un domeniu simplu conex din* $\mathbb{R}^2$ *care nu conţine originea.*

R. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow \omega$ e o diferenţială exactă pe orice domeniu simplu conex care nu conţine originea.

$$dz = \frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2}dx + \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \dfrac{y}{3}\dfrac{1}{\left(x - \dfrac{y}{3}\right)^2 + \dfrac{8y^2}{9}} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} \qquad (*) \end{cases}.$$

Integrăm în raport cu x prima ecuaţie:

$$z = \frac{3y}{3y2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\left(x - \dfrac{y}{3}\right)}{\dfrac{2\sqrt{2}y}{3}} + C(y) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\frac{8y^2}{9}}{\left(x-\frac{y}{3}\right)^2+\frac{8y^2}{9}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-\frac{y}{3}}{\frac{2\sqrt{2}y}{3}}\right)+C'(y)=$$

$$=\frac{8}{2\sqrt{2}\cdot 9}\frac{y^2}{x^2-\frac{2}{3}xy+y^2}\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{-y-(3x-y)}{y^2}+C'(y)=$$

$$=\frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}+C'(y).$$

Din $(*)$ rezultă $C'(y)=0\Rightarrow C(y)=C$. Deci

$z(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}+C$, pentru $y\neq 0$.

9. *Calculaţi* $\int\limits_C \frac{2xy\,dx+(1-x^2)\,dy}{(1-x^2)^2+y^2}$, *$C$ fiind o curbă închisă ce conţine în interior punctul* $(1,0)$, *dar nu conţine* $(-1,0)$.

R. Fie $P(x,y)=\frac{2xy}{(1-x^2)^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{1-x^2}{(1-x^2)^2+y^2}$. Rezultă $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2x(1-x^2)^2-2xy^2}{\left[(1-x^2)^2+y^2\right]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Dacă C n-ar conţine în interior nici un punct singular, atunci ω are fi exactă şi deci integrala ar fi 0. Punctele $A(1,0)$ şi $B(-1,0)$ sunt puncte singulare pentru ω, dar numai $A(1,0)$ este în interiorul curbei C.

În cazul de faţă integrala are aceeaşi valoare pe orice curbă închisă Γ care are în interior punctul $A(1,0)$, dar lasă în exterior punctul B. Asta pentru că domeniul mărginit de această curbă Γ şi C este simplu conex. (Se face o tăietură, adică se ia un segment de dreaptă care uneşte un punct A de pe C cu un punct B de pe Γ. Atunci domeniul $[BA]\cup C\cup[AB]\cup\Gamma^-$ este simplu conex. Pe acest domeniu ω este exactă, deci $\int_C\omega=\int_\Gamma\omega$.) De exemplu, vom calcula integrala pe un cerc $\mathcal{C}(A,r)$, unde $A(1,0)$ este centrul cercului.

$$\mathcal{C}(A,r):(x-1)^2+y^2=r^2\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},\theta\in[0,2\pi),r>0\text{ fixat.}$$

$$\text{Atunci }\int_C\omega=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{2(1+r\cos\theta)\,r\sin\theta\,r(-\sin\theta)\,d\theta+(-2r\cos\theta-r^2\cos^2\theta)\,r\cos\theta\,d\theta}{(-2r\cos\theta-r^2\cos^2\theta)^2+r^2\sin^2\theta}=$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-2r^2 \sin^2\theta\,(1+r\cos\theta) - r^2\cos^2\theta\,(2+r\cos\theta)}{r^2\cos^2\theta\,(2+r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta} d\theta =$$
$$= -\int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2\theta\,(1+r\cos\theta) + \cos^2\theta\,(2+r\cos\theta)}{\cos^2\theta\,(2+r\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta.$$

Luăm $r > 0$ arbitrar de mic, de exemplu, $r \to 0$. Rezultă

$$\int_C \omega = -\int_0^{2\pi} \frac{2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta}{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{2\,d\theta}{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} =$$
$$= -\int_0^{2\pi} \frac{2\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}}{4 + \operatorname{tg}^2\theta} = -\int_0^{2\pi} \frac{2d(\operatorname{tg}\theta)}{4+\operatorname{tg}^2\theta} =$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2d(\operatorname{tg}\theta)}{4+\operatorname{tg}^2\theta} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{2d(\operatorname{tg}\theta)}{4+\operatorname{tg}^2\theta} - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{2d(\operatorname{tg}\theta)}{4+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Facem substituţia $\operatorname{tg}\theta = u \Rightarrow d\theta = \dfrac{du}{1+u^2}$; de aici deducem că

$$\int_C \omega = -\int_0^{\infty} \frac{2\,du}{4+u^2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,du}{4+u^2} - \int_{-\infty}^{0} \frac{2\,du}{4+u^2} = -4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{4+u^2}.$$

(Am făcut ca în fiecare integrală noua variabilă u să varieze în acelaşi sens; această condiţie nu era satisfăcută în integrala iniţială.)

$$\int_C \omega = -4\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty} = -2\pi.$$

Observaţie. $\int\limits_C \omega$ cu C care cuprinde în interior două puncte singulare $A(1,0)$, $B(-1,0)$ va fi egală cu suma a două integrale curbilinii pe două curbe C', C'' care înconjoară respectiv punctele A şi B, fiecare luate în sens direct. Propoziţia e analogă pentru un număr finit de puncte singulare.

10. (*i*) *Determinaţi $n \in N$ a.î. expresia*

$$\omega = \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{(x^2+y^2)^n}(x\,dy - y\,dx)$$

(a, b, c constante date) să fie o diferenţială totală exactă pe un domeniu ce nu conţine originea.

(ii) Pentru acest n găsit, să se calculeze $\int_C \omega$, unde C este drumul ce uneşte două puncte A şi B ale axei Ox, de abscise x_0 şi x_1.

R. *(i)* $\omega = P\,dx + Q\,dy$ e diferenţială totală exactă dacă şi numai dacă $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Dar,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y\left(ax^2+2bxy+cy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^n}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-ax^2y-2bxy^2-cy^3}{\left(x^2+y^2\right)^n}\right) =$$

$$\frac{\left(-ax^2-4bxy-3cy^2\right)\left(x^2+y^2\right)^n - 2yn\left(-ax^2y-2bxy^2-cy^3\right)\left(x^2+y^2\right)^{n-1}}{\left(x^2+y^2\right)^n}$$

$$= \frac{-\left(ax^2+4bxy+3cy^2\right)\left(x^2+y^2\right)+2ny^2\left(ax^2+2bxy+cy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{n+1}};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ax^3+2bx^2y+cxy^2}{\left(x^2+y^2\right)^n}\right) =$$

$$\frac{\left(3ax^2+4bxy+cy^2\right)\left(x^2+y^2\right)^n - 2nx\left(x^2+y\right)^{n-1}\left(ax^3+2bx^2y+cxy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(3ax^2+4bxy+cy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2nx^2\left(ax^2+2bxy+cy^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{n+1}}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow 2ny^2\left(ax^2+2bxy+cy^2\right) - \left(x^2+y^2\right)\left(ax^2+4bxy+3cy^2\right) =$$

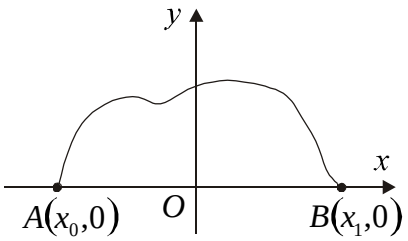
$$= -2nx^2\left(ax^2+2bxy+cy^2\right) + \left(x^2+y^2\right)\left(3ax^2+4bxy+cy^2\right) \Leftrightarrow$$

$$2n\left(x^2+y^2\right)\left(ax^2+2bxy+cy^2\right) = 4\left(x^2+y^2\right)\left(ax^2+2bxy+cy^2\right).$$

Rezultă $n = 2$. Expresia

$$\omega = \frac{ax^2+2bxy+cy^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$$

este formă diferenţială exactă. Deci $\int_C \omega$ nu depinde de drum.



(ii) Lucrând în coordonate curbilinii $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right.$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \geq 0$ rezultă

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = d\theta,$$

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{x^2 + y^2} = \frac{ar^2\cos^2\theta + 2br^2\cos\theta\sin\theta + cr^2\sin^2\theta}{r^2} =$$

$$= a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta.$$

De aici găsim

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \left(a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} a\frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} 2b\sin\theta\,(\sin\theta)'\,d\theta + \int_0^{2\pi} c\frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= \left[\frac{a}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + b\sin^2\theta + \frac{c}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \pi\,(a + c)\,.$$

Integrala este independentă de x_0 şi x_1.

11. *Să se determine funcţiile ale căror diferenţiale totale sunt:*

a) $\omega = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz$;

b) $\omega = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$

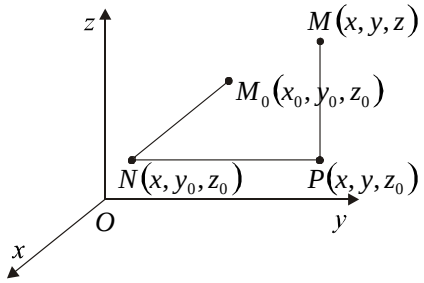
R. *a) Metoda I:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\ \omega = df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P = y + z \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q = x + z \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = R = x + y \end{array} \right. \Rightarrow f(x, y, z) = xy + xz + C(y, z) \Rightarrow$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + \dfrac{\partial C}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + z$ (din ecuaţia 2) $\Rightarrow \dfrac{\partial C}{\partial y} = z$. Deci $C(y, z) = zy + K(z)$, iar $f(x, y, z) = xy + xz + yz + K(z)$. Din ecuaţia 3 rezultă $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x + y$, dar $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x + y + K'(z)$. Rezultă $K'(z) = 0$, adică $K(z) = k$ – constantă. Deci $f(x, y, z) = xy + xz + yz + k$ a.î. $df = \omega$.

Metoda II: Se calculează $f = \int\limits_C \omega$, unde C este drumul M_0NPM, cu $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, $M_0N \parallel Ox$, $NP \parallel Oy$, $N(x, y_0, z_0)$, $P(x, y, z_0)$. Rezultă



$$f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) = \int_{M_0N} \omega + \int_{NP} \omega +$$

$$+ \int_{PM} \omega = \int_{x_0}^{x} (y_0 + z_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} (x + z_0)\, dy + \int_{z_0}^{z} (x + y)\, dz =$$
$$= (x - x_0)(y_0 + z_0) + (y - y_0)(x + z_0) + (x + y)(z - z_0) =$$
$$= xy + xz + yz + k.$$

b) Metoda I:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{-xy}{z^2} \end{cases} \Rightarrow f(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C(y,z) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y^2} + \frac{x}{z} + \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow C = C(z)$$
$$f(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C(z) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-xy}{z^2} + C'(z) = \frac{-xy}{z^2} \Rightarrow C'(z) = 0 \Rightarrow C(z) = C \Rightarrow$$
$$f(x,y,z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C.$$

Metoda II: Integrăm pe acelaşi drum ca la punctul a):

$$f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) = \int_{x_0}^{x} \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) dx +$$

$$+ \int_{y_0}^{y} \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{y^2}\right) dy + \int_{z_0}^{z} \frac{-xy}{z^2} dz =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right)(x - x_0) + \frac{x}{z_0}(y - y_0) + \frac{x}{y_0} - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z_0} =$$

$$= x - \frac{x}{y_0} + \frac{xy_0}{z_0} - x_0\left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) + \frac{xy}{z_0} - \frac{xy}{z_0} + \frac{x}{y_0} - \frac{x}{y} +$$

$$+ \frac{xy}{z} - \frac{xy}{z_0} = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + k.$$

Deci, $f(x, y, z) = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C$.

12. *Acelaşi enunţ pentru* $\omega = \frac{y\,dx}{a-z} + \frac{x\,dy}{a-z} + \frac{xy\,dz}{(a-z)^2}$.

R.
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{a-z} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{a-z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{(a-z)^2} \end{cases}.$$

Din prima ecuaţie avem

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{a-z} + C(y, z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{a-z} + \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{x}{a-z} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow C(y, z) = C(z) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{(a-z)^2} +$$

$$+ C'(z) = \frac{xy}{(a-z)^2} \Rightarrow C'(z) = 0 \Rightarrow C(z) = C.$$

Deci, $f(x, y, z) = \frac{xy}{a-z} + C$.

3. Probleme propuse

1. Să se calculeze lungimea arcului de elice circulară $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = h\theta$, $\theta \in [0, \pi]$.

R. $ds = \sqrt{a^2 + h^2}d\theta$, $l = \pi\sqrt{a^2 + h^2}$.

2. Să se calculeze integralele curbilinii de prima speţă pe arcele de curbă din plan indicate:

a) $I = \int\limits_{\gamma} xyds$, unde $\gamma : x = t$, $y = t^2$, $t \in [-1, 1]$;

b) $I = \int\limits_{\gamma} \sqrt{y\,(2-y)}ds$, $\gamma : x = t - \sin t$, $y = 1 - cost$, $t \in [0, \pi/2]$;

c) $I = \int\limits_{\gamma} x^2y^2ds$, $\gamma : x = a\cos^3 t$, $y = asin^3t$, $t \in [0, \pi/2]$, $a > 0$.

R. *a)* $I = 0$; *b)* $I = 1/(3\sqrt{2})$; *c)* $I = 3a^5/70$.

3. Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întâi pe arcele de curbă din $\mathbb{R}^3$ indicate:

a) $I = \int\limits_{\gamma} z\,(x^2 + y^2)\,ds$, unde $\gamma : x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $t \in [0, 1]$;

b) $I = \int\limits_{\gamma} (x + y + z)\,ds$, $\gamma : x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$, $t \in [0, \pi/2]$, $a, b > 0$.

R. *a)* $I = \dfrac{4\sqrt{3}}{5} + \dfrac{8\sqrt{2}}{15}$; *b)* $I = \sqrt{a^2 + b^2}\left(2a + \dfrac{b\pi^2}{8}\right)$.

4. $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ în sens pozitiv pe arcul elicei $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0, \pi]$.

5. Fie $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ drumul dat parametric prin $x = t^2$, $y = t$. Există integrala curbilinie de speţa a II-a $I = \int\limits_{\gamma} \dfrac{dx}{1+y^2} + \dfrac{dy}{1+x^2}$? În caz afirmativ, să se calculeze această integrală.

R. $I = \ln 2 - \dfrac{1}{4\sqrt{2}}(\ln\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} - 2arctg\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 2arctg\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \pi)$.

6. Forma diferenţială $\omega = \dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ este exactă? În caz afirmativ, să se calculeze valoarea integralei pe o curbă închisă arbitrară din plan.

R. Nu este exactă pentru că nu este închisă.

7. Calculaţi $\int\limits_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, unde C este o curbă închisă.

R. 0.

8. Să se calculeze $\int\limits_{AB} y^2dx + z^2dy + xydz$ pe arcul definit de $x = t^3$, $y = t^2$, $z = t$, $t \in [0, 2]$.

R. $\dfrac{3}{7}2^7 + 2^3 + \dfrac{1}{3}2^5$.

9. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int\limits_{AB} \dfrac{dy}{x+4}$ pe arcul de elipsă

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, cu $A\left(3,0\right)$, $B\left(0,2\right)$.

R. $I=\frac{\pi}{3}-\frac{16}{3\sqrt{7}}arctg\frac{1}{\sqrt{7}}$.

10. Să se determine valoarea integralei

$$\int\limits_{AB}\left(x^3-yz\right)dx+\left(2y^3-zx\right)dy+\left(3z^3-xy\right)dz$$

pe un drum ce uneşte punctele $A\left(1,1,1\right)$, $B\left(2,3,4\right)$.

R. 131.

11. Se dă integrala $\int\limits_{AB}\left(\frac{y}{xy-1}+2x\right)dx+\left(\frac{x}{xy-1}+2y\right)dy$ pe un domeniu $D\subset\mathbb{R}^2$ care nu intersectează hiperbola $xy=1$. Arătaţi că integrala nu depinde de drum în D şi să se calculeze integrala pe un astfel de drum.

R. $f\left(x,y\right)=\ln\left|xy-1\right|+x^2+y^2+C$, $xy\neq 1$.

12. Să se determine valoarea integralei $\int\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ pe curbele: a) o curbă închisă ce nu conţine originea în interior; b) un cerc cu centrul în origine parcurs în sens direct.

R. a) 0; b) 2π.

Capitolul 5. Integrale duble

Fie $D = [a, b] \times [c, d]$ un dreptunghi din $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie dată şi

$$\begin{cases} \Delta_1 : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b \\ \Delta_2 : y_0 = c < y_1 < ... < y_m = d \end{cases}$$

două diviziuni ale intervalelor $[a, b]$ şi respectiv $[c, d]$. Notăm $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$ diviziunea corespunzătoare a dreptunghiului D. Norma diviziunii Δ se defineşte prin $\|\Delta\| = \max\{\|\Delta_1\|, \|\Delta_2\|\}$.

Considerăm un sistem de puncte intermediare $(\xi, \eta) = \{(\xi_i, \eta_j), i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m}\}$, unde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j$.

Definiţia 1. *Suma Riemann ataşată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare (ξ, η) este*

$$S(f; \Delta; (\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Definiţia 2. *Funcţia f se numeşte integrabilă dublu pe dreptunghiul D dacă există un număr real I cu proprietatea că $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ încât $(\forall)\Delta$ o diviziune a lui D cu $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ şi $(\forall)\,(\xi, \eta)$ un sistem de puncte intermediare, avem*

$$|S(f; \Delta; (\xi, \eta)) - I| < \xi.$$

Numărul real I, dacă există, este unic şi se numeşte *integrala (dublă) a funcţiei f pe dreptunghiul D*. Se notează $I = \iint_D f(x, y)dxdy$.

Teorema 1 (Fubini)**.** *Fie $f : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe D. Atunci f este integrabilă dublu pe $D = [a, b] \times [c, d]$ şi*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)dy)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy.$$

Se mai notează

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Definiţia 3. *O mulţime $E \subset \mathbb{R}^2$ mărginită se numeşte mulţime măsurabilă Jordan dacă funcţia constantă 1 este integrabilă pe E. În acest caz, măsura Jordan a lui E se defineşte prin formula*

$m(E) = \iint\limits_E 1 dxdy.$

O mulţime $E \subset \mathbb{R}^2$ mărginită este măsurabilă Jordan dacă şi numai dacă frontiera $FrE(= \partial E)$ a lui E este de măsură Jordan nulă.

Definiţia 4. *O mulţime măsurabilă Jordan $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte simplă în raport cu axa Oy dacă este mărginită de dreptele $x = a$ şi $x = b$ şi de graficele a două funcţii continue $y = y_1(x)$ şi $y = y_2(x)$, $x \in [a, b]$. Cu alte cuvinte, D are forma*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\right\}.$$

Teorema 2 (Fubini). *Fie D mulţime măsurabilă Jordan simplă în raport cu Oy, de forma de mai sus şi $f : D \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă pe D şi are loc formula*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Definiţia 5. *O mulţime măsurabilă Jordan $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte simplă în raport cu axa Ox dacă este mărginită de dreptele $y = c$ şi $y = d$ şi de graficele a două funcţii continue $x = x_1(y)$ şi $x = x_2(y)$, $y \in [c, d]$. Cu alte cuvinte, D are forma*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\right\}.$$

Teorema 3 (Fubini). *Fie D mulţime măsurabilă Jordan simplă în raport cu Ox, de forma de mai sus şi $f : D \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă pe D şi are loc formula*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Teorema 4 (de schimbare de variabilă)**.** *Fie $\Delta, D \subseteq \mathbb{R}^2$ mulţimi măsurabile Jordan, $f : D \to \mathbb{R}$ integrabilă pe D. Presupunem că $T : \overline{\Delta} \to \overline{D}$, $T = (T_1, T_2)$, T este o func'ţie (transformare) bijectivă de la Δ la D,*

$T \in C^1\left(\overline{\Delta}\right)$ *şi* $\det J_T(u,v) \neq 0$, $\forall (u,v) \in \Delta$, *unde*

$$\det J_T(u,v) = \frac{D(T_1,T_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_1}{\partial u} & \dfrac{\partial T_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial u} & \dfrac{\partial T_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

este jacobianul transformării T. *Atunci are loc formula de schimbare de variabilă in integrala dublă:*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{(x,y)=T(u,v)}{=} \int_\Delta f\left(T(u,v)\right)\left|\det J_T(u,v)\right| dudv.$$

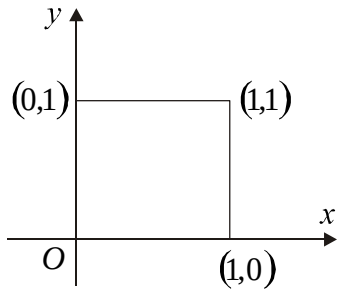
Funcţia care schimbă variabila veche (x,y) în variabila nouă (u,v) este $T(u,v) = (x,y)$ sau, detaliat, $\left(T_1(u,v), T_2(u,v)\right) = (x,y)$.

Probleme rezolvate

Să se calculeze integralele duble pe mulţimile indicate:

1. $\iint\limits_D \dfrac{x^2\,dx\,dy}{1+y^2}$, *unde* D *este dreptunghiul de laturi* $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

R. $D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow$



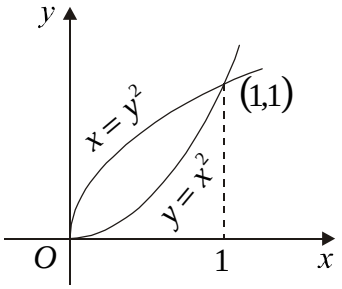
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} \left(\frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

2. $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy$, D *fiind domeniul limitat de* $y=x^2$, $y^2=x$.

R.



$$D:\left\{\begin{array}{l} 0\le x\le 1\\ x^2\le y\le \sqrt{x}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$I=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy\right)dx=$$

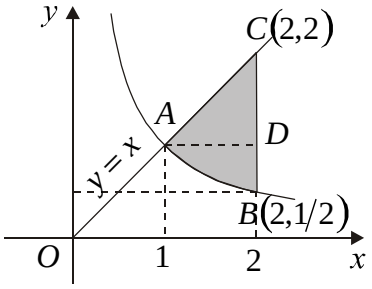
$$=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2\sqrt{x}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=\int_0^1\left(x^{5/2}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^{7/2}}{7/2}+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{10}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}.$$

3. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, *unde* D *este domeniul limitat de* $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x\in[1,2]$.

R. $D:\left\{\begin{array}{l} 1\le x\le 2\\ \frac{1}{x}\le y\le x\end{array}\right.$



$$I=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy=\int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x}\right)dx=$$

$$=\int_1^2\left(-x+x^3\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2=$$

$$=\frac{9}{4}.$$

Sau: $D:\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\le y\le 1\\ \frac{1}{y}\le x\le 2\end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{l} 1\le y\le 2\\ y\le x\le 2\end{array}\right.$.

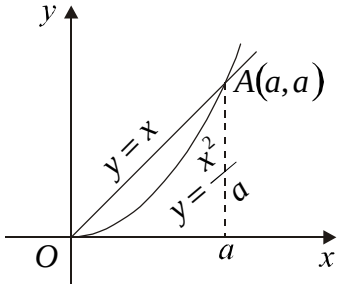
$$I=\int_{\frac{1}{2}}^1 dy\int_{\frac{1}{y}}^2\frac{x^2}{y^2}\,dx+\int_1^2 dy\int_y^2\frac{x^2}{y^2}\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{x^3}{3y^2}\Big|_{\frac{1}{y}}^2\right)dy+$$

$$+\int_1^2\left(\frac{x^3}{3y^2}\Big|_y^2\right)dy=\int_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{1}{3y^5}\right)dy+\int_1^2\left(\frac{8}{3y^2}-\frac{y}{3}\right)dy=$$

$$= \left(-\frac{8}{3y} - \frac{1}{3}\frac{y^{-4}}{-4}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \left(-\frac{8}{3y} - \frac{y^2}{6}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{9}{4}.$$

4. $\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, *unde* D *este domeniul limitat de* $y = x$, $y = \frac{x^2}{a}$ $(a > 0)$.

R. Determinăm punctele de intersecţie:



$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{x^2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{x^2}{a} \Leftrightarrow x\left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0 \\ x_2 = a, y_2 = a \end{cases}.$$

Domeniul este $D : \begin{cases} 0 \le x \le a \\ \dfrac{x^2}{a} \le y \le x \end{cases}$.

$$I = \int_0^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^a \left(x\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{x}\right)dx =$$

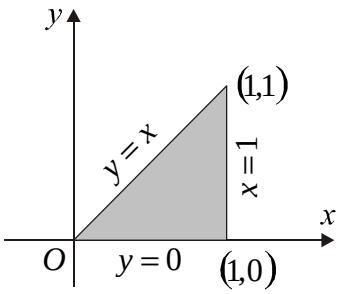
$$= \int_0^a \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)dx = \frac{\pi}{4}x\Big|_0^a - \int_0^a (x)'\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\,dx =$$

$$= \frac{\pi a}{4} - x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_0^a + \int_0^a x\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$

$$= a\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = a\frac{1}{2}\ln\left(x^2+a^2\right)\Big|_0^a = \frac{a}{2}\ln 2.$$

5. $\iint\limits_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy$, D *este domeniul limitat de* $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

R. Domeniul D se defineşte prin inegalităţile $D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$. Atunci, $I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy$. Dar,



$$\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy = \int_0^x \frac{4x^2-y^2}{\sqrt{4x^2-y^2}}dy =$$

$$= 4x^2\arcsin\frac{y}{2x}\Big|_0^x + \int_0^x y\left(\sqrt{4x^2-y^2}\right)'_y dy =$$

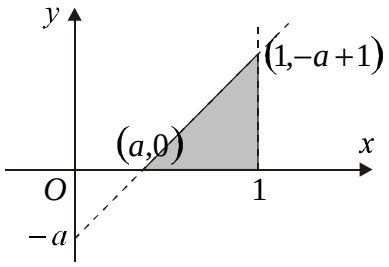
$$= 4x^2\frac{\pi}{6} + y\sqrt{4x^2-y^2}\Big|_0^x - \int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy \Rightarrow$$

$$\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2\pi}{3} + x^2\sqrt{3}\right) = x^2\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \Rightarrow$$

$$I = \int_0^1 x^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{3}.$$

6. $\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, *unde* D *este domeniul limitat de* $x = 1$, $y = 0$, $x - y = a$, *cu* $0 < a < 1$.

R. $D: \begin{cases} a \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x - a \end{cases}$.



$I = \int_a^1 dx \int_0^{x-a} \frac{dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. Făcând schimbarea de variabilă $y = t^2$, obţinem

$$\int_0^{x-a} \frac{dy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \int_0^{\sqrt{x-a}} \frac{2t\,dt}{\sqrt{x}+t} =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{x-a}} \frac{(t+\sqrt{x})-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+t}\,dt = 2\left[t - \sqrt{x}\ln\left(t+\sqrt{x}\right)\right]\Big|_0^{\sqrt{x-a}} =$$

$$= 2\left[\sqrt{x-a} - \sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x}\right) + \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right] =$$

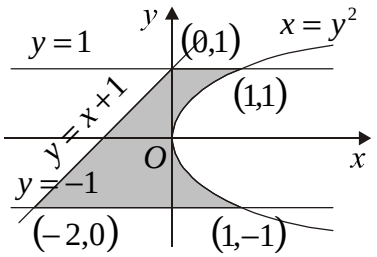
$$= 2\sqrt{x-a} - 2\sqrt{x}\ln\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$I = \int_a^1 \left(2\sqrt{x-a} - 2\sqrt{x}\ln\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{4}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^1 =$$

$$= \frac{4}{3}(1-a)^{\frac{3}{2}}.$$

7. $\iint_D (x-y)\,dx\,dy$, *unde* D *este domeniul limitat de* $y = -1$, $y = 1$, $y = x + 1$, $x = y^2$.

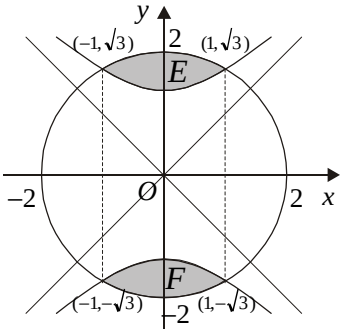
R. $D:\left\{\begin{array}{l}-1\le y\le 1\\ y-1\le x\le y^2\end{array}\right.$.



$$I=\int_{-1}^{1}dy\int_{y-1}^{y^2}(x-y)\,dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_{y-1}^{y^2}dy=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y^4}{2}-y^3-\frac{(y-1)^2}{2}+y\,(y-1)\right)dy=$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y^4}{2}-y^3+\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^5}{10}-\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{6}-\frac{y}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{8}{15}.$$

8. $\iint_D \operatorname{sign}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy$, *unde* D *este discul* $x^2+y^2\le 4$ *(de centru* O, $r=2$*).*

R. $\operatorname{sign}(x^2-y^2+2)=$
$$=\begin{cases}1,\ x^2-y^2+2>0\\ 0,\ x^2-y^2+2=0\\ -1,\ x^2-y^2+2<0\end{cases}.$$



$$x^2-y^2+2=0\Leftrightarrow\frac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=-1$$

– hiperbolă echilateră, conjugată cu hiperbola

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Asimptotele sunt $y=\pm x$. Punctul $(0,2)$ îndeplineşte condiţia $x^2-y^2+2<0$. Rezultă că intersecţia cercului cu hiperbola este

$$\left\{\left(1,\sqrt{3}\right),\left(-1,\sqrt{3}\right),\left(-1,-\sqrt{3}\right),\left(1,-\sqrt{3}\right)\right\}\neq\emptyset.$$

Notăm E, F suprafeţele haşurate (cuprinse între cerc şi hiperbolă). Fie $D_1=E\cup F$, $D_2=disc-(E\cup F)=disc-D_1$. Deci

$$\operatorname{sign}\left(x^2-y^2+2\right)=\left\{\begin{array}{l}1,\ (x,y)\in D_2\\ 0,\ (x,y)\in\text{hiperbolei}\\ -1,\ (x,y)\in D_1\end{array}\right..$$

$$I = \iint_D \operatorname{sign}\left(x^2 - y^2 + 2\right) dx\, dy =$$

$$= \iint_{D_1} \operatorname{sign}\left(x^2 - y^2 + 2\right) dx\, dy + \iint_{D_2} \operatorname{sign}\left(x^2 - y^2 + 2\right) dx\, dy =$$

$$= \iint_{D_1} (-1)\, dx\, dy + \iint_{D_2} 1\, dx\, dy = -\iint_{D_1} dx\, dy + \mathcal{A}_{disc} -$$

$$- \iint_{D_1} dx\, dy = 4\pi - 2\iint_{D_1} dx\, dy = 4\pi - 4\iint_E dx\, dy =$$

$$= 4\pi - 4\int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = 4\pi - 4\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x^2+2}\right) dx.$$

Calculăm

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx \overset{x=2\sin t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\, dt =$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t\, dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = 4\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 4\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Iar

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}\, dx = \int_{-1}^{1} x\left(\sqrt{x^2+2}\right)' dx + 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+2}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+2}dx + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

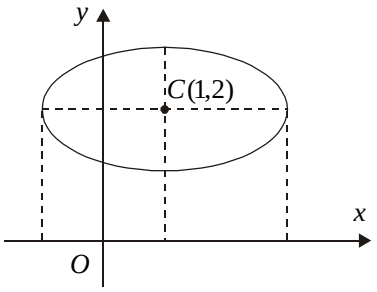
$$= \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}.$$

Deci

$$I = 4\pi - 8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 4\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right).$$

9. $\iint\limits_D (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10)\, dx\, dy,$
$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 \leq 0\}.$

R.



Inecuaţia din definiţia domeniului D se scrie:

$$D : \frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 \leq 1,$$

deci D este interiorul unei elipse de centru $C(1,2)$ şi semiaxe 2, 1. Facem schimbarea de variabilă $\begin{cases} x-1 = 2\rho\cos\theta \\ y-2 = \rho\sin\theta \end{cases}$. Din inecuaţia lui D rezultă $\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq 1$. Iar $\theta \in [0, 2\pi)$. Aplicăm formula de schimbare de variabilă:

$$\iint_{D=\varphi(\Delta)} f(x)\,dx \overset{x=\varphi(u)}{=} \iint_{\Delta} f(\varphi(u)) \,|\det \varphi'(u)\,| du.$$

La noi, $\det \varphi'(u) = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = 2\rho$. Atunci,

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2-4x-4y+10\right) dx\,dy = \iint\limits_D \left[(x-2)^2+(y-2)^2+2\right] dx\,dy$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left[(2\rho\cos\theta - 1)^2 + (\rho\sin\theta)^2 + 2\right] 2\rho\,d\theta =$$
$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left(3\rho^2\cos^2\theta - 4\rho\cos\theta + \rho^2 + 3\right) 2\rho\,d\theta =$$
$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{3\rho^4}{4}\cos^2\theta - \frac{4\rho^3}{3}\cos\theta + \frac{\rho^4}{4} + 3\frac{\rho^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta =$$
$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{4}{3}\cos\theta + \frac{7}{4}\right) d\theta =$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta + \frac{7}{2}\int_0^{2\pi} d\theta =$$
$$= \left[\frac{3}{4}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) - \frac{8}{3}\sin\theta + \frac{7}{2}\theta\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{17\pi}{2}.$$

10. $\iint\limits_D \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+\dfrac{y^2}{3}}}$, *unde* D *este domeniul mărginit de curba*

$$\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y.$$

R. Facem transformarea (schimbarea de variabilă) $T:\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\sqrt{3}\rho\sin\theta \end{cases}$.
Vedem în ce se transformă frontiera lui D.

$$\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y \Leftrightarrow \left(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta\right)^2 = \sqrt{3}\rho^3\cos^2\theta\sin\theta \Leftrightarrow$$
$$\rho = \sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta.$$

Cum $\rho>0$ rezultă $\sin\theta>0$. Deci $\theta\in[0,\pi]$. Apoi, trebuie ca $0<\rho<\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta$ (în interiorul lui D).

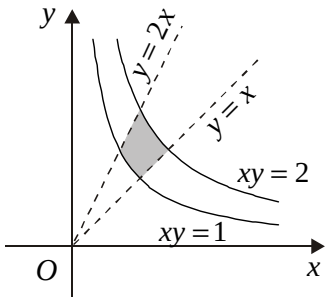
$$\det\varphi'(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sqrt{3}\sin\theta & \sqrt{3}\rho\cos\theta \end{vmatrix} = \sqrt{3}\rho\cos^2\theta+\sqrt{3}\rho\sin^2\theta = \sqrt{3}\rho.$$

Atunci integrala devine:

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta} \frac{\sqrt{3}\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}} = \sqrt{3}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta} d\rho$$
$$= \sqrt{3}\int_0^{\pi} \sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta = -\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = 2.$$

11. $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, $D=\left\{(x,y)\mid 1\le xy\le 2, 1\le\frac{y}{x}\le 2, x>0\right\}$.

R. Ecuaţia $xy=1$ reprezintă o hiperbolă raportată la axe. La fel $xy=2$.



Apoi, $1\le\frac{y}{x}\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\le y \\ y\le 2x, \end{cases}$ cu $x>0$.

Mulţimea D este porţiunea dintre hiperbole şi cele două drepte. Facem transformarea T : $\begin{cases} xy=u,\ 1\le u\le 2 \\ \frac{y}{x}=v,\ 1\le v\le 2 \end{cases}$. Aflăm x şi y în funcţie de u şi v: $\begin{cases} y=xv \\ x^2v=u \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{\frac{u}{v}},\ y=\sqrt{uv}$.

$$\det\varphi'(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}\neq 0.$$

Funcţia de sub integrală devine $f(x,y) = x = \sqrt{\frac{u}{v}}$. Deci:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Delta f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) |\det \varphi'(u,v)|\,du\,dv.$$

$$I = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\,dv = \int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{2} du \int_1^2 v^{-3/2} dv$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{u}}{2}\left(\frac{v^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Big|_1^2\right) du =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_1^2 \sqrt{u} du = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

12. $\iint\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

R. Folosim coordonatele polare: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, $\rho \ge 0$, $\rho \le 1$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

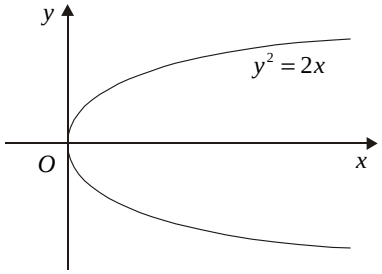
$$I = \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\,d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho\sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}d\rho.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\rho^2 = t$, deducem

$$I = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{4}\left(\arcsin t + \sqrt{1-t^2}\right)\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

13. $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$, *$D$ este interiorul parabolei* $y^2 = 2x$.

R. $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Egalitatea $y^2 = 2x \Leftrightarrow \rho^2\sin^2\theta = 2\rho\cos\theta \Leftrightarrow \rho = 2\,\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$. În interiorul parabolei, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, iar $\rho \in \left(0, 2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)$. Jacobianul transformării este $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$.



$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\rho^2}\Big|_0^{2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}\right) d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+4\frac{\cos^2\theta}{\sin^4\theta}} - 1\right) d\theta = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^4\theta}{\sin^4\theta + 4\cos^2\theta} - 1\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^2\theta\,d\theta}{\sin^4\theta + 4\cos^2\theta} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta\,\mathrm{tg}^2\theta + 4}.$$

Sub integrală avem o funcţie pară în sin şi cos. Facem substituţia $\mathrm{tg}\,\theta = t$ şi ţinem cont că

$$\sin^2\theta = \mathrm{tg}^2\theta\cos^2\theta = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Atunci, $I = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}t^2 + 4} \cdot \frac{dt}{1+t^2}$, deci

$$I = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^4 + 4t^2 + 4} = 4\int_0^{\infty} \frac{dt}{(t^2+2)^2} \overset{t=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u\,\frac{\sqrt{2}\,du}{\cos^2 u} =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,du =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

14. $\iint\limits_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dx\,dy$, $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\right\}$.

R. $\left\{ \begin{array}{l} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{array} \right.$ cu $\rho^2 \geq 1$. Deci $\rho \geq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\infty} \left(e^{-\rho^2} ab\rho\right) d\rho = ab \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\Big|_1^{\infty}\right) d\theta = \frac{\pi ab}{e}.$$

Probleme propuse

1. Să se calculeze integralele duble, în caz de existenţă:
$\iint\limits_D \ln(x+y)\, dxdy$, $D : 0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$.

R. $\frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}$.

2. $\iint\limits_D \sqrt{xy} dxdy$, $D : y \geq x^3$, $y \leq x^2, x \geq 0$.

R. $2/78$.

3. $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy$, $D : x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$.

R. $\pi\left(e^{a^2} - 1\right)$.

4. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy$, $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

R. $16\pi/5$.

5. $\iint\limits_D (1-y)\, dxdy$, $D : x^2 + \left(y^2-1\right)^2 \leq 1$, $y \leq x^2$, $x \geq 0$.

R. $1/15$.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Apreutesei, N. Apreutesei Dumitriu, Introducere în teoria integrabilităţii, Editura Performantica, Iaşi, 2005.

2. L. Aramă, T. Morozan, Probleme de calcul diferenţial şi integral, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.

3. C. Avramescu, C. Vladimirescu, Curs de calcul ştiinţific, Tipografia Universităţii din Craiova, Craiova, 2002.

4. D. Borş, Note de curs pentru Facultatea de Automatică şi Calculatoare, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi, 2003-2004.

5. N. Calistru, Gh. Ciobanu, Curs de Analiză Matematică, vol. I, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1989.

6. C. Călin, N. Negoescu, Matematici superioare (Elemente de analiză matematică, geometrie diferenţială, ecuaţii diferenţiale,

analiză numerică), Editura Unirea, Iaşi, 1999.

7. S. Chiriţă, Probleme de matematici superioare, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

8. N. Ciorănescu, Curs de algebră şi analiză matematică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1958.

9. A. Corduneanu, Gh. Ciobanu şi N. Grădinaru,

Analiză matematică, vol. I, II, Rotaprint, Institutul Politehnic Iaşi, 1979.

10. B. Demidovitch, Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique, Deuxième édition revue, Éditions MIR Moscou, 1968.

11. G.M. Fihtenholt, Curs de calcul diferenţial şi integral, vol. 1-3, Editura Tehnică, Bucureşti, 1963-1965.

12. Şt. Frunză, Lecţii de analiză matematică, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 2004.

13. A. Halanay, V. Olariu, S. Turbatu, Analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

14. A. Neagu, Curs de Analiză Matematică predat la facultatea de Automatică şi Calculatoare, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi (pe Internet), http://eureka.cs.tuiasi.ro/~aneagu.

15. M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, Analiză matematică, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

16. C. P. Niculescu, Analiză 3: Calcul integral pe $\mathbb{R}^n$, Reprografia Universităţii din Craiova, Craiova, 2000.

17. A. Precupanu, Bazele analizei matematice, Editura Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 1993.

18. M. N. Roşculeţ, Analiză matematică, vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

19. W. Rudin, Real and Complex analysis, 3rd edition, McGraw-Hill Company, New York, 1987.

20. G. Sireţchi, Calcul diferenţial şi integral, vol. 1,2, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

21. O. Stănăşilă, Analiză Matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

22. G.E. Şilov, Analiză matematică (Funcţii de o variabilă reală), Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

23. R. Tudorache, Culegere de probleme de Analiză Matematică, vol. II, Calcul integral, Editura Universităţii Tehnice "Gh. Asachi", Iaşi, 2001.